Министерство здравоохранения Республики Беларусь
УО «Витебский государственный медицинский университет»

С. В. Иванова, С. Л. Гараничева

ОСНОВЫ МАТЕМАТИКИ

Для иностранных граждан – слушателей подготовительного отделения высших медицинских учреждений образования

Витебск – 2007

УДК 51:378 – 054.6(07)
~~ББК 22.1я7~~
И 20

Рецензенты:

заведующий кафедрой высшей математики Витебского государственного технологического университета, кандидат технических наук, доцент А. А. Джежора;

заведующий кафедрой физики и высшей математики Витебской государственной академии ветеринарной медицины, кандидат биологических наук, доцент В. И. Соболевский.

Иванова С. В.

И 20 Основы математики. Пособие для иностранных граждан – слушателей подготовительного отделения высших медицинских учреждений образования: Пособие / С. В. Иванова, С. Л. Гараничева. – Витебск: ВГМУ, 2007. – 171 с.

ISBN 985-466-028-1

Учебное пособие "Основы математики" подготовлено в соответствии с типовыми учебными программами для подготовительных отделений ВУЗов. В него включены основные теоретические положения высшей математики, задачи для решения с подробным разбором примеров. Кроме того, учитывая специфику отделения подготовки иностранных граждан, в пособие включен русско-английский словарь математических терминов.

Рекомендовано к изданию Центральным учебно-научно-методическим Советом непрерывного медицинского и фармацевтического образования Витебского государственного медицинского университета (18.09.2006г., протокол №6).

УДК: 51:378 – 054.6(07) (076.5)
ББК 22.1я7

ISBN 985-466-028-1

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.

Данное учебное пособие написано в соответствии с программой по математике для иностранных граждан – слушателей подготовительного отделения высших медицинских учреждений образования и предназначено для решения задачи математической подготовки будущих студентов – медиков. Учтены различия в уровнях базового образования иностранных граждан, поэтому в книгу включены краткие сведения по начальному курсу математики. Разделы, посвященные высшей математике, изложены ясным и понятным языком, с выделением основных положений. Кроме того, некоторые темы даны в двух вариантах изложения: в более простом, содержащем только основные понятия и определения рассматриваемого материала, и в подробном – для расширенного и углубленного изучения.

Структура пособия такова: весь материал разбит на темы, темы – на пункты. Каждая тема содержит подробный разбор примеров решения задач и заканчивается упражнениями, предназначенными как для закрепления изучаемого материала, так и для более углубленного усвоения курса (задачи повышенной сложности со звездочкой). Для большей наглядности пособие содержит большое количество поясняющих рисунков. В книге использованы как собственные разработки авторов, так и материалы различных учебных пособий. Книга также содержит русско-английский словарь математических терминов (Яснова М. М., Бельдюшкин В. С., Федотова З. А. Русско-английский словарь – минимум по математике, физике и химии. – М: Университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, 1969) и список кратких математических обозначений, которые также будут способствовать лучшему усвоению математики.

Тема №1.

1. **Натуральные числа и действия над ними: сложение, вычитание, умножение, деление.**
2. **Дроби, их виды и действия над ними.**
3. **Рациональные (иррациональные), целые, положительные (отрицательные) числа и действия над ними.**
4. **Модуль числа.**
5. **Степень числа, ее свойства и действия над степенными числами.**

1. Натуральные числа и действия над ними: сложение, вычитание, умножение, деление.

Понятие натурального числа относится к простейшим, первоначальным понятиям математики и не подлежит определению через другие, более простые понятия. Возникло оно, как и вся наука математика, из потребностей практической деятельности людей.

Натуральные числа (N) – это множество чисел, возникающих в результате счета предметов, например 1, 2, 3, 4, 100…и т.д. обозначаются с помощью десяти цифр: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Множество натуральных чисел имеет наименьшее число 1, но не имеет наибольшего числа. Для натуральных чисел определены следующие действия: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня. Только сложение и умножение являются для натуральных чисел выполнимыми всегда, поскольку в результате сложения и умножения получаются также натуральные числа.

Сложение и его свойства:

Результат сложения двух или нескольких чисел называется их суммой, а сами числа – слагаемыми:

$a+b=c$, где ***a, b*** – слагаемые, ***c*** – сумма.

Свойства:

1) ***переместительное*** (коммутативное) свойство сложения:

$$a+b=b+a;$$

Этот закон формулируется так: от перестановки мест слагаемых сумма не изменяется.

2) ***сочетательное*** (ассоциативное) свойство сложения:

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

Этот закон формулируется так: значение суммы не изменится, если какую-либо группу слагаемых заменить их суммой.

Вычитание:

Вычесть из числа ***a*** число ***b*** – значит найти такое число ***c***, которое в сумме с числом ***b*** дает ***a***:

$a - b = c$, где ***a*** – уменьшаемое, ***b*** – вычитаемое, ***c*** – разность.

Для натуральных чисел вычитание не всегда выполнимо. Например: 4 – 4; 2 – 7; 15 – 40. В результате данных действий мы не получим натуральное число.

Умножение и его свойства:

Умножить число ***a*** на число ***b*** – значит найти сумму ***b*** слагаемых, каждое из которых равно ***a***:

$a \cdot b = c$, где ***a, b*** – множители, ***c*** – произведение.

Например: $3 \cdot a = a + a + a$.

Свойства:

1) ***переместительное*** свойство умножения: $a \cdot b = b \cdot a$;
Этот закон формулируется так: от перестановки сомножителей значение произведения не изменяется.
2) ***сочетательное*** свойство умножения: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
Этот закон формулируется так: значение произведения не изменится, если какую-либо группу сомножителей заменить их произведением.
3) ***распределительное*** (дистрибутивное) свойство, связывающее сложение (вычитание) и умножение, можно записать: $(a \pm b) \cdot c = a \cdot c \pm b \cdot c$
Этот закон формулируется так: чтобы умножить сумму (разность) на число, достаточно умножить каждое слагаемое на это число и сложить полученные произведения. То же самое относится и к делению суммы (разности) на число:

$$\frac{a}{k} \pm \frac{b}{k} = \frac{a \pm b}{k}.$$

Деление и его свойства:

Разделить число ***a*** на число ***b*** – значит найти такое число ***c***, которое при умножении на число ***b*** дает число ***a***:

$\frac{a}{b} = c$, где ***a*** – делимое (кратное), ***b*** – делитель, ***c*** – частное.

Свойства:

1) Признак делимости суммы (разности) – если каждое из слагаемых делится на число ***c***, то и сумма (разность) делится на это же число ***c***:

$$\frac{x}{c} \pm \frac{y}{c} = \frac{x \pm y}{c}.$$

Для натуральных чисел деление нацело не всегда выполнимо, поскольку результат не всегда является натуральным числом, например: 5:2=2,5.

Признаки делимости:

– на 2 и 5 делятся только те числа, в записи которых последняя цифра либо «0», либо выражает число, делящееся соответственно на 2 или 5. Например: 10, 22, 310 и т.д.
– на 4 (или на 25) делятся те и только те числа, у которых две последние цифры – нули или выражают число, делящееся соответственно на 4 (или на 25). Например: 4, 8, 100, 144.
– на 3 (или на 9) делятся те и только те числа, сумма цифр которых делиться на 3 (или на 9). Например: 33:3, 27:9, 27:3.
– на 10 делятся числа, оканчивающиеся нулем.

Числа, делящиеся на 2, называются ***чётными***. Например: 2, 4, 6, 8 … и т.д. 2:2, 4:2, 6:2, 8:2. Все остальные числа - ***нечётные***. Например: 3, 5, 7, 9… и т.д.

Дополнительные свойства сложения и умножения:

1) $a + 0 = a$; **2)** $a \cdot 0 = 0$; **3)** $a \cdot 1 = a$.

Простые и составные числа.

Любое натуральное число можно представить в виде произведения единственным способом (или разложить на простые множители): $a = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n}$. Например: 27=$3^3$; 20=$2^2$·5; 10=$10^2$=$2^2 5^2$.

Число называется ***простым***, если его делителями являются только единица и само число. Например, числа 2, 3, 5, 13, 29 – простые.

Число, имеющее другие делители (кроме себя и 1), называется ***составным***. Например, числа 10, 15, 4, 8 – составные.

Наибольший общий делитель (НОД) и наименьшее общее кратное (НОК).

Наибольшим общим делителем (НОД) называется максимальное число, на которое делятся оба (или несколько) натуральных числа нацело. Например, рассмотрим множество **А** делителей числа 45 и множество **В** делителей 60 и найдем их НОД (45, 60).

A={1, 3, 5, 9, 15, 45}

B={1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60}

$45\mid 3$	$45\mid 9$	$45\mid 45$	$45\mid 15$	$60\mid 1$	$60\mid 4$	$60\mid 12$	$60\mid 6$	$60\mid 20$
$15\mid 5$	$5\mid 5$	$1\mid 1$	$3\mid 3$	$60\mid 2$	$15\mid 15$	$5\mid 5$	$10\mid 10$	$3\mid 3$
$3\mid 3$	$1\mid 1$		$1\mid 1$	$30\mid 3$	$1\mid 1$	$1\mid 1$	$1\mid 1$	$1\mid 1$
$1\mid 1$				$10\mid 5$				
				$2\mid 2$				
				$1\mid 1$				

Общими делителями чисел 45 и 60 называются числа, являющиеся элементами как множества **А**, так и множества **В** (пересечение множеств $A\cap B$). Общие делители 3, 5, 15, максимальное из них – 15, следовательно, в данном примере НОД (45, 60)=15.

Краткая запись решения данного примера имеет вид:

Дано: 45,60. Найти НОД (45, 60).

Решение:

$45\mid 3$	$60\mid 2$	$45=3^2\cdot5\cdot1$
$15\mid 3$	$30\mid 2$	$60=2^2\cdot3\cdot5\cdot1$
$5\mid 5$	$15\mid 3$	НОД $(45,60)=3\cdot5=15$.
$1\mid 1$	$5\mid 5$	
	$1\mid 1$	

Выбираем максимальное число, на которое делятся 45 и 60 (произведение только общих множителей двух чисел в минимальных степенях).

Наименьшим общим кратным (НОК) называется наименьшее число, которое делится нацело на каждое из предложенных натуральных чисел. Например, рассмотрим множество **А** чисел, кратных 4, и множество **В** чисел, кратных 6 (которые делятся на 6) и найдем НОК (4, 6).

A={4, 8, 12, 16, 20, 24,…} 4:4, 8:4, 12:4, 16:4, 20:4, 24:4 и т.д.

B={6, 12, 8, 24…} 6:6, 12:6, 18:6, 24:6 и т.д.

Числа 12, 24, 36 и т.д. будут общими кратными для чисел 4 и 6 (или пересечением множеств чисел, делящихся на 4 и на 6). Нужно найти наименьшее общее кратное – это наименьшее число, которое делиться на каждое из натуральных чисел. Таким числом является 12, следовательно, НОК(4, 6)=min{12, 24, 36…}=12.

Краткая запись решения данного примера имеет вид:

Дано: 4, 6. Найти НОК(4, 6).

Решение:

4|2	6|2	$4=2^2$
2|2	3|3	$6=2\cdot3$
1|1	1|1	НОК{4, 6}$=2^2\cdot3=12$.

Выбираем минимальное число, которое делится и на 4, и на 6 нацело (произведение всех множителей двух чисел в максимальных степенях).

Рассмотрим еще один пример:

Дано: 126, 540, 630. Найти НОД и НОК.

Решение:

126|2	540|2	630|2	$126=2\cdot3^2\cdot7\cdot1$
63|3	270|2	315|5	$540=2^2\cdot5\cdot3^3\cdot1$
21|3	135|5	63|3	$630=2\cdot5\cdot32\cdot7\cdot1$
7|7	27|3	7|7	НОД(126, 540, 630)$=2\cdot3^2=18$
1|1	9|3	1|1	НОК(126, 540, 630)$=2^2\cdot3^2\cdot5\cdot7=3780$.
	3|3		
	1|1		

2. Дроби, их виды и действия над ними.

Одна или несколько равных частей единицы называется ***обыкновенной дробью***. Обыкновенная дробь записывается с помощью черты и двух натуральных чисел. Например: $\frac{m}{n}$ – обыкновенная дробь, где ***m*** – ***числитель*** дроби, ***n*** – ***знаменатель*** дроби. Если числитель меньше знаменателя (m<n), то дробь – ***правильная***. Если числитель дроби больше знаменателя (m>n), то дробь – ***неправильная***. Например: $\frac{3}{5}$ – правильная дробь; $\frac{5}{3}$ – неправильная дробь. Дроби, состоящие из натурального числа и дроби называются ***смешанными***. Например: $1\frac{2}{3}$ – смешанная дробь; 1 – целая часть, $\frac{2}{3}$ – дробная часть. Смешанную дробь можно обратить в неправильную дробь, например: $1\frac{2}{3}=\frac{1\cdot3+2}{3}=\frac{5}{3}$.

Основные свойства дробей:

1. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, если $a\cdot d=b\cdot c$

2. $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$, если. $a\cdot d>b\cdot c$ (сравнение дробей)

3. $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$, если $a\cdot d<b\cdot c$ (сравнение дробей)

4. $\frac{a}{b}=\frac{k\cdot a}{k\cdot b}$, если числитель и знаменатель разделить или умножить на одно и тоже число, то получиться дробь, равная данной. Обратная операция называется сокращением дробей: $\frac{k\cdot a}{k\cdot b}=\frac{a}{b}$.

Действия над дробями:

1. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+c\cdot b}{b\cdot d}$ сложение,

2. $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-c\cdot b}{b\cdot d}$ вычитание,

3. $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$ умножение,

4. $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$ деление.

Приведение дробей к общему знаменателю.

Например: дроби $\frac{5}{12}$ и $\frac{7}{18}$ приведем к общему знаменателю:

Для этого нужно

1) найти НОК(12, 18)=$2^2\cdot 3^2$=36

12|2	18|2	$12=2^2\cdot 3$
6|2	9|3	$18=2\cdot 3^2$
3|3	3|3	

$\frac{5}{12}=\frac{5\cdot 3}{12\cdot 3}=\frac{15}{36}$ $\qquad$ $\frac{7}{18}=\frac{7\cdot 2}{18\cdot 2}=\frac{14}{36}$

2) сложить две дроби

$\frac{5}{12}+\frac{7}{18}=\frac{15}{36}+\frac{14}{36}=\frac{15+14}{36}=\frac{29}{36}$

Кроме обыкновенных дробей существуют еще десятичные дроби.

Десятичная дробь – это обыкновенная дробь, знаменатель которой равен 10, 100, 1000, … и т.д. Для того, чтобы обратить обыкновенную дробь в десятичную, нужно числитель дроби разделить на знаменатель. Например: $\frac{1}{4}=1:4=0{,}25$. Десятичные дроби могут быть ***периодическими и непериодическими, конечными и бесконечными***. Например: 2,5 – конечная непериодическая дробь; 3,6(1)=3,61111… – бесконечная периодическая дробь.

Задания для решения:

Найти НОД и НОК чисел:

1. 27, 60, 50.

2. 45, 15, 54.

3. 64, 48, 52.

4. 62, 33, 28.

Выполнить действия:

5. $\frac{2}{3}+\frac{3}{8}$

6. $\frac{5}{9}-\frac{3}{8}$

7. $\frac{6}{8}+\frac{5}{7}$

8. $1\frac{6}{7}-\frac{1}{5}$

9. $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}$

10. $\frac{5}{9}:\frac{3}{8}$

11. $1\frac{6}{7}:\frac{1}{5}$

12. $83{,}759+4{,}280$

13. $16{,}45:7$

14. $0{,}38\cdot 39$

15. $5{,}370-2{,}093$

Сравнить числа:

16. $\frac{7}{9}$ и 0,36

17. $\frac{2}{7}$ и $\frac{53}{22}$.

3. Рациональные (иррациональные), целые, положительные (отрицательные) числа.

Координатная прямая – это прямая линия с выбранным на ней началом отсчета, единичным отрезком (в качестве единицы измерения) и направлением. Натуральные числа, расположенные на координатной прямой правее начала отсчета, называются ***целыми положительными*** числами, например, 1, 2, 3,…25…. Натуральные числа, расположенные на координатной прямой левее начала отсчета называются ***целыми отрицательными*** числами, например, 1, 5, 6, 7,…151,…. Множество натуральных чисел, дополненное нулем, называют множеством **целых** чисел. Совокупность чисел 0, ±1, ±2, ±3…±100… образует множество целых чисел (***Z***). Над целыми числами можно выполнять различные действия: сложение, вычитание, деление и умножение.

Каждой дроби (обыкновенной или десятичной) можно поставить в соответствие какую-либо точку координатной прямой. При этом мы получаем как положительные, так и отрицательные, как целые, так и дробные числа. Объединение множеств целых и дробных чисел (положительных и отрицательных) составляет множество ***рациональных чисел Q***. Любое рациональное число можно записать в виде $\frac{p}{q}$, где $p\in Z_0$ (включая ноль), $q\in Z$; причем $q\neq 0$ (так как деление на ноль не имеет смысла), т. е. любое рациональное число можно представить в виде конечной или бесконечной периодической дроби.

Каждому рациональному числу можно поставить в соответствие единственную точку на координатной прямой. На множестве ***Q*** можно производить действия сложения, вычитания, умножения и деления (кроме деления на «0»). Например: $-13:6=-2{,}1(6)$. Получилась периодическая дробь 2,1(6). Целая часть – 2, дробная часть – 1 и (6) – период. Входит во множество рациональных чисел.

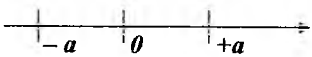
Иррациональные числа – числа, которые нельзя представить в виде периодической дроби. Например: $e = 2{,}718281\ldots$; $\pi = 3{,}1415926\ldots$ Объединение множеств рациональных и иррациональных чисел образует множество ***действительных*** чисел ***R***. Между множеством ***R*** и множеством точек координатной прямой существует взаимнооднозначное соответствие, т.е. каждому действительному числу соответствует единственная точка числовой прямой, и наоборот, каждой точке числовой прямой соответствует единственное число. Таким образом, получается ***числовая прямая***.

4. Модуль числа.

Модулем числа ***a*** называется само это число, если $a \geq 0$, или это число, взятое с противоположным знаком, если $a < 0$.

$$|a| = \begin{cases} +a, \text{ если } a \geq 0 \\ -a, \text{ если } a < 0 \end{cases}$$

Если $a \neq 0$, то на координатной прямой модулю числа ***a*** соответствуют две точки, равноудаленные от нуля:



Свойства модулей:

1. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;

2. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, где $b \neq 0$;

3. $|a + b| \leq |a| + |b|$, например: $|3 + (-8)| < |3| + |-8|$;

4. $|a - b| \geq |a| - |b|$, например: $|(-3) - 8| > |(-3)| - |8|$.

Примечание:

1. Из установленного на координатной прямой соответствия следует, что то число больше, которое на координатной прямой расположено правее. Следовательно: а) всякое положительное число больше нуля и больше отрицательного числа; б) всякое отрицательное число меньше нуля; в) из двух отрицательных чисел больше то, модуль которого меньше: Например $-3{,}8 > -5{,}1$, т.к. $|-3{,}8| < |-5{,}1|$.

2. Сложение, вычитание, умножение и деление рациональных чисел:

Например: $(-6) + (-5{,}3) = -11{,}3$; $\quad (-15) : 5 = 3$;

$(-3) - (-5) = -3 + 5 = 2$; $\quad (-3) \cdot (-5) = 15$

5. Степень числа, ее свойства и действия над степенными числами.

Степенью числа а с натуральным показателем *n* называется произведение ***n*** сомножителей, каждый из которых равен ***a***.

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}$, где ***a*** – основание степени, ***n*** – показатель степени.

Основные свойства степени с натуральным показателем.

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;

3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$;

4. $(-a)^n = \begin{cases} a^n, & \text{если } n\text{-чётное,} \\ -a^n, & \text{если } n\text{- нечётное.} \end{cases}$

5. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;

6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$;

7. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Задания для решения:

Вычислить:

18. $(0{,}4)^4$; $(0{,}3)^2$; $(-1{,}2)^2$.

19. $\dfrac{15^3 \cdot 21^3}{35^2 \cdot 3^4}$;

20. $(-1{,}4)^3 \cdot (3\frac{4}{7})^2$;

21. $\dfrac{(-2)\cdot(-3)^{17} - (-3)^{16}}{9^7 \cdot 15}$;

22. $\dfrac{18^{-3} \cdot 3^7}{2^{-5}}$;

23. $\dfrac{(a \cdot b)^4}{(a^{-2} \cdot b^3)^{-3}}$;

24. $(1{,}7)^{-3} \cdot 9^0 : (5{,}1)^{-3} \cdot 6^{-3}$.

Тема №2

1. Корень n-ой степени из действительного числа.

2. Преобразование корней.

3. Степень с рациональным (целым и дробным) показателем.

1. Корень n-ой степени из действительного числа.

Корнем n-ой степени (где $n \in N, n \neq 1$) из действительного числа ***a*** называется действительное число *b*, *n*-ая степень которого равна ***a***: $b = \sqrt[n]{a}$, или $b^n = a$. Действие нахождения корня *n*-ой степени из числа называется ***извлечением корня n-ой степени***. ***Арифметическим корнем*** n-ой степени из неотрицательного числа a $(a \geq 0)$ называется неотрицательное число b $(b \geq 0)$, n-ая степень которого равна a: $\sqrt[n]{a} = b$ или $b^n = a$.

2. Преобразование арифметических корней.

1. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n \cdot k]{a^k}, (a \geq 0)$
2. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}, (a \geq 0, b \geq 0)$
3. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}, (a \geq 0, b \geq 0)$
4. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}, (a \geq 0,\ n - \textit{натуральное})$
5. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$, где $\begin{pmatrix} a \geq 0;\ m, n \in N \\ m \geq 2, n \geq 2 \end{pmatrix}$
6. $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| - \textit{если } n - \textit{четное, натуральное, } n \geq 2. \\ a - \textit{если } n - \textit{нечетное, натуральное, } n \geq 3. \end{cases}$
7. Если $a_1 > a_2 > 0$, то $\sqrt[n]{a_1} > \sqrt[n]{a_2}$.

Частным случаем корня n-ой степени является ***квадратный корень*** из числа: $\sqrt{a} = b$ или $b^2 = a$.

Преобразование квадратного корня:

1. $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
2. $\left(\sqrt{a}\right)^n = \sqrt{a^n}$, где $(a > 0,\ n - \textit{натуральное})$
3. $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, где $(a \geq 0, b > 0)$
4. $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, если $a > b$
$\sqrt{a} < \sqrt{b}$, если $a < b$

Задания для решения:

25. Внести множитель под знак корня: $a \cdot \sqrt[3]{1 + \dfrac{1}{a^3}}$

26. Вынести множитель из-под знака корня

а) $\sqrt[6]{1 + \dfrac{1}{a^6}}$;

б) $\sqrt{4a^2 \cdot b^3}$, где $a < 0,\ b > 0$;

в) $\sqrt{16a^4 b^6 c^3}$, где $b < 0,\ c \geq 0,\ (a - \textit{любое})$.

27. Вычислить: $\sqrt{343}-\sqrt{252}-\sqrt{7}$

28. Сравнить числа: $3\sqrt{5}$ и $4\sqrt{3}$

29. Выполнить действия: $\sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}$.

3. Степень числа с рациональным (целым и дробным) показателем.

Рассмотрим выражение a^p, где $p\in \boldsymbol{Z}$. В зависимости от вида, который будет иметь показатель степени, возможны следующие варианты:

1. Если $p=0$, то по определению, $a^0=1$ (при $a\neq 0$). Например, $5^0=1$.
2. Если $p<0$, то по определению, $a^{-p}=\dfrac{1}{a^p}$ (при $a\neq 0$).

Например, $2^{-3}=\dfrac{1}{2^3}$, $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}=\dfrac{3}{2}$.

3. Рассмотрим выражение $a^{\frac{p}{q}}$, где p/q – рациональное число. Выражение $a^{\frac{p}{q}}$ имеет смысл только при $a>0$. Если $a>0$, $p\in Z$, $q\in N$, то по определению $a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$ (аналогично корню n-ой степени из неотрицательного числа a). Например: $2^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{2^2}$; $a^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{a^2}$; $b^{\frac{-3}{4}}=\sqrt[4]{b^{-3}}=\sqrt[4]{\dfrac{1}{6^3}}$.

Примечание. Выражение $(-8)^{1/2}$ или $(-8)^{3/4}$ смысла не имеет.

4. Степень с рациональным показателем обладает теми же свойствами, что и степень с натуральным показателем, а именно, если $a>0$ и $n\in \boldsymbol{Q}$; $m\in \boldsymbol{Q}$, то:

1) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$;
3) $(a^m)^n=a^{m\cdot n}$;
5) $(a\cdot b\cdot\ldots\cdot k)=a^n\cdot b^n\cdot\ldots\cdot k^n$.
2) $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$;
4) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$;

Задания для решения:

Вычислить:

30. $8^{\frac{1}{3}}\cdot 8^{\frac{1}{3}}-16:16^{\frac{3}{4}}+(9^{\frac{1}{7}})^{\frac{7}{2}}$

31. $\dfrac{2\cdot 4^{-2}+\left(81^{-\frac{1}{2}}\right)^3\cdot\left(\dfrac{1}{9}\right)^{-3}}{(125)^{-\frac{1}{3}}\cdot\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2}+\left(\sqrt{3}\right)^0\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}}$

32. $\left(\dfrac{a^{\frac{5}{12}}\cdot a^{\left(-\frac{3}{8}\right)}}{a^{\frac{7}{24}}}\right)^{-\frac{4}{3}}$, при $a=125$

33. $(32)^{1,6}$

34. $(1,2)^5\cdot\left(2\dfrac{1}{12}\right)^2$

Упростить:

35. $\dfrac{\left(3\cdot 2^{20}+7\cdot 2^{19}\right)\cdot 5^2}{\left(13\cdot 8^4\right)^2}$

37. $\dfrac{\sqrt[4]{\sqrt[4]{a^{20}}}}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^{10}}$

36. $(625)^{-0.25}$

38. $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}}}{z^{-\frac{1}{6}}}:\left(\dfrac{z^{-\frac{1}{2}}}{x^{-\frac{1}{3}}\cdot y^{-\frac{1}{3}}}\cdot\dfrac{x^{-\frac{5}{6}}\cdot z^{-\frac{2}{3}}}{y^{\frac{5}{6}}}\right)$

Тема №3.

1. Одночлены и многочлены.

2. Разложение многочленов на множители.

3.Тождества сокращённого умножения.

1. Одночлены и многочлены.

Одночлен – произведение нескольких чисел, обозначенных цифрами или буквами. Например: $34a^5b^7c^9$. ***Степенью одночлена*** называется сумма показателей степеней его буквенных множителей. Например:

$5 = 5x^0$ – одночлен нулевой степени,

$5x^2$ – одночлен второй степени,

$5x^3y^2z$ – одночлен шестой степени.

Многочленом называется алгебраическая сумма нескольких одночленов. Например: $4x^2y^2-7x^2y^4+3x^3y^5+\ldots$ и т.д. ***Степенью многочлена*** называют наибольшую степень одночлена, входящего в этот многочлен. Например:

$2x^2y+5x^4y^3-xy+6$, степень многочлена равна 7.

Сложение многочленов.

1) ***Подобные члены*** (одинаковые, кроме коэффициентов)

При сложении и вычитании многочленов надо привести подобные члены. Например:

$$\underline{2ab}+\underline{\underline{5a^2b^2}}+\underline{5ab}+\underline{\underline{3a^2b^2}}=2ab+5ab+5a^2b^2+3a^2b^2=7ab+8a^2b^2$$

Умножение многочлена на многочлен:

Чтобы умножить многочлен на многочлен, надо умножить каждый член одного многочлена на каждый член другого многочлена и привести подобные члены.

Например:
$(3x-2y+z)(5x-2z)=15x^2-10xy+5xz-6xz+4yz-2z^2=15x^2-10xy-xz+4yz-2z^2$

2. Разложение многочлена на множители.

Преобразование многочлена в произведение двух или нескольких многочленов (среди которых могут быть и одночлены) называется разложением многочлена на множители. Существует много способов разложения многочленов на множители. Рассмотрим некоторые из них.

1) ***Метод вынесения общего множителя за скобки.***

Например: $3ax^4-6a^7x^7=3ax^3\left(x-2a^6x^4+4\right)+12ax^3$.

2) ***Метод группировки.***

Например: $ab+2a-3b-6$ – многочлен. Представим его в виде суммы двух двучленов (сгруппируем):

$\underline{ab}+\underline{\underline{2a}}-\underline{3b}-\underline{\underline{6}}=(ab-3b)+(2a-6)=b(a-3)+2(a-3)$, т. к. $ab-3b=b(a-3)$ и $2a-6=2(a-3)$. Далее вынесем за скобки общий множитель $(a-3)$ и получим: $b(a-3)+2(a-3)=(a-3)(b+2)$.

3) ***Метод выделения из трехчлена квадрата двучлена.***

Например, разложим на множители следующий многочлен x^2-6x-7.

Если к данному выражению прибавить и отнять число 9, то получим:

$x^2-6x-7=x^2-6x-7+9-9=\left(x^2-6x+9\right)-7-9=(x-3)^2-16$. Далее раскладываем как разность квадратов: $(x-3-4)(x-3+4)=(x-7)(x+1)$.

Несмотря на эффективность вышеуказанных методов, наиболее часто для преобразования многочленов используют ***тождества сокращенного умножения.*** Приведем некоторые из них.

3. Тождества сокращённого умножения.

1. $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ разность квадратов.

2. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ квадрат разности.

3. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ квадрат суммы

4. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$ куб разности

5. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$ куб суммы

6. $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ сумма квадратов

7. $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$ сумма квадратов

8. $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)=(a-b)\underbrace{\left(a^2+ab+b^2\right)}_{\text{Неполный квадрат суммы}}$ разность кубов

9. $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=(a+b)\underbrace{(a^2-ab+b^2)}_{\text{Неполный квадрат разности}}$ сумма кубов

10. $(x+y+a)^2=x^2+y^2+a^2+2xy+2ax+2ay$ квадрат трехчлена

11. $(x-y-a)^2=x^2+y^2+a^2-2xy-2ax-2ay$ квадрат трехчлена

Задания для решения:

Разложить на множители:

39. $12a^2x^2-3a^2x^2$

40. $a^3+a^2y+2ay^2+2y^3$

41. $8a^3-c^3b^6$

42. $6x^2+x-2$

43. $2x^2+3x+1$

44. $2x^4+x^3+4x^2+x+2$

45. $a^2-2bc+2ac-ab$

46. x^3-3x-2

47. x^4+4

48. $x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2$

49*. $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$

Упростить:

50. $\left(1+\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2}\right)\left(\dfrac{3x}{2x-y}-\dfrac{2x+y}{x}\right)$

51. $\left(\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{x^2}{x^3+8}\cdot\dfrac{x^2-2x+4}{2-x}\right):\dfrac{8}{x^2-4x+4}-\dfrac{x^2+x+6}{4x+8}$

Сократить дробь:

52. $\dfrac{a^4-16}{a^4-4a^3+8a^2-16a+16}$

Упростить:

53. $\dfrac{1}{x^2+4x+4}-\dfrac{4}{x^4+4x^3+4x^2}+\dfrac{4}{x^3+2x^2}$

54. $\dfrac{2x}{(x+2)(x-2)}:\dfrac{8}{x^2-4x+4}$

55. $\dfrac{x(x-2)}{4(x+2)}-\dfrac{x^2+x+6}{4x+8}$

56. $\left(\dfrac{a-4b}{a+\sqrt{ab}-6b}-\dfrac{a-9b}{a+6\sqrt{ab}+9b}\right)\cdot\dfrac{b^{-\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-3b^{\frac{1}{2}}}$

57. $\dfrac{a^2+1}{a\sqrt{\left(\dfrac{a^2-1}{2a}\right)^2+1}}$

58*. $\dfrac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{a-b}{(c-a)(c-b)}$

Тема№4.

1. Линейные уравнения с одной переменной.

2. Квадратные уравнения, методы их решения, формула корней квадратного уравнения.

1. Линейные уравнения с одной переменной.

Это уравнения вида: $ax+b=0$, где $a\neq 0$, x – неизвестное. Данное уравнения имеет решение: $ax=-b$, $x=-\frac{b}{a}$ – корень уравнения.

Корнем или ***решением*** уравнения называется значение переменной, обращающее уравнение в истинное равенство. ***Решить*** уравнение – значит найти множество его корней. Множество всех x, при которых уравнение имеет смысл, называется ***областью определения*** уравнения. ***Равносильными*** (эквивалентными) называются два или несколько уравнений, если каждое решение (корень) одного из уравнений является решением (корнем) другого (нескольких) уравнения. Следовательно, равносильные уравнения имеют одно и то же множество решений, принадлежащих области определения этих уравнений. Например, уравнения $x^2-4=0$ и $(x+2)\cdot(x-2)=0$ равносильны; множество их решений: $\{2;-2\}$.

Приведем пример решения линейного уравнения с одной переменной:

$$3x-5=10-2x$$
$$3x+2x=10+5$$
$$5x=15$$
$$x=3$$

Данное уравнение имеет только одно решения *x=3*.

Однако, в общем случае, линейное уравнение может иметь:

1. один корень: $2x=2, x=1$;
2. ни одного корня:

$$2x-2x=2+1$$
$0\cdot x=3$ – нет решений;

3. бесконечное множество решений:

$a\cdot x=a$, если $a=0$

$0\cdot x=0$, x – любое.

2. Квадратные уравнения, методы их решения, формула корней квадратного уравнения.

Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, где x – переменная, ***a, b*** и ***c*** – некоторые числа, причем, *a≠0*. Числа ***a, b*** и *c* – коэффициенты квадратного уравнения. Число ***a*** называют первым коэффициентом, ***b*** – вторым коэффициентом и ***c*** – свободным членом. Если $a,b,c \neq 0$, то уравнение ***полное***. Если хотя бы один из коэффициентов равен нулю, то уравнение называется ***неполным квадратным уравнением***. Приведем примеры неполных квадратных уравнений.

1. Если $b=0, c=0$, тогда уравнения принимает вид: $ax^2=0$. Это неполное квадратное уравнение. Его решением будет один корень $x=0$.

2. Если $b=0$, тогда уравнения принимает вид: $ax^2+c=0$. Это также неполное квадратное уравнение. Его решение будет иметь вид:

$$x^2=-\frac{c}{a}; \quad x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}\ .$$

Если c и a – разных знаков, то уравнение имеет два корня. Если a и c – одинаковых знаков, то уравнение не имеет ни одного действительного корня (в таких случаях корнями уравнения будут комплексные числа).

3.Если $c=0$, тогда получим уравнения вида: $ax^2+bx=0$ или $x(ax+b)=0$. Данное неполное квадратное уравнение будет иметь следующее решение:

$$\left[\begin{array}{l} x_1=0 \\ ax+b=0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=-\dfrac{b}{a} \end{array}\right.$$, т. е. имеет два корня.

Методы решения квадратного уравнения.

Одним из методов решения квадратного уравнения является ***метод выделения полного квадрата двучлена*** (уже рассматривался ранее). Например, решим полное квадратное уравнение $x^2-4x-5=0$.

Если в левой части уравнения добавить и отнять 2^2, то часть слагаемых образует квадрат разности:

$$x^2-4x-5=x^2-2\cdot 2x+2^2-2^2-5=(x^2-2\cdot 2x+2^2)-2^2-5=(x-2)^2-3^2.$$

Раскладываем полученное выражение как разность квадратов $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$:

$$(x-2-3)(x-2+3)=0$$
$$(x-5)(x+1)=0$$
$$x_1=5; \quad x_2=-1$$

Таким образом, решением уравнения будут два действительных корня. Однако решение квадратных уравнений выделением квадрата двучлена часто приводит к громоздким преобразованиям. Поэтому чаще всего решают уравнение в общем виде, применяя формулу корней квадратного уравнения.

Формула корней квадратного уравнения.

В общем случае квадратное уравнение ax^2+bx+c имеет решение:
$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ или $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, где $D=b^2-4ac$ – дискриминант.

Далее возможны три случая:

1. $D>0$, тогда уравнение имеет два действительных корня:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

2. $D=0$, тогда уравнение имеет два одинаковых действительных корня:

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$$

3. $D<0$ - уравнение не имеет действительных корней.

Примечание:

1) Иногда квадратное уравнение имеет вид $x^2+px+q=0$ и называется ***приведенным***, оно не содержит коэффициента a. Тогда его решение выглядит несколько по-другому:

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\,.$$

2) Уравнения вида $ax^4+bx^2+c=0$ называются ***биквадратными.*** С помощью замены переменной $x^2=y$ оно приводится к стандартному квадратному уравнению вида $ay^2+by+c=0$ и далее решается по формуле для корней обычного квадратного уравнения.

Решим несколько квадратных уравнений:

Пример 1. $12x^2+7x+1=0$

$D=7^2-4\cdot12\cdot1=1$, $D\succ0$, следовательно, уравнение будет иметь два действительных корня:

$$x_1=\frac{-7+\sqrt{1}}{24}\quad\text{и}\quad x_1=\frac{-7-\sqrt{1}}{24}.$$ Ответ: $x_1=-\frac{1}{3}$, $x_2=-\frac{1}{4}$

Пример 2. $x^2-12x+36=0$.

$D=(-12)^2-4\cdot1\cdot36=0$, следовательно, уравнение будет иметь два одинаковых действительных корня:

$$x=\frac{12\pm\sqrt{0}}{2}=6.$$ Ответ: x=6.

Задания для решения:

Найти корни уравнения:

59. $\frac{x^2}{x+5}=\frac{25}{x+5}$

60. $\frac{y+5}{y^2-5y}-\frac{y-5}{2y^2-10y}=\frac{y+25}{2y^2-50}$

Решить уравнения:

61. $3x^2-6x-5=0$

62. $x^2+4x-5=0$

63. $\frac{2}{x^2-4}+\frac{x-4}{x^2+2x}=\frac{1}{x^2-2x}$

64. $9x^2+6x+1=0$

65. $5y^2-6y+1=0$

66. $9x^4-37x^2+4=0$

Тема №5.

1.Теорема Виета

2. Разложение квадратного трехчлена на множители.

3. Дробные рациональные уравнения.

1. Теорема Виета.

Теорема: если квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет действительные корни, то их сумма равна $-\frac{b}{a}$, а произведение равно $\frac{c}{a}$:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

Обратная теорема: если сумма каких-либо двух чисел x_1 и x_2 равна $-\frac{b}{a}$, а их произведение равно $\frac{c}{a}$, то эти числа являются корнями квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Например, найдем сумму и произведение корней уравнения

$$3x^2-5x+2=0.$$

По теореме Виета, $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$. Значит, сумма корней данного уравнения равна $x_1+x_2=-\frac{-5}{3}=\frac{5}{3}$. Произведение корней данного уравнения равно $x_1\cdot x_2=\frac{2}{3}$. Проверим правильность решения другим способом, используя формулу для корней квадратного уравнения. Корни этого уравнения будут равны:

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot3\cdot2}}{2\cdot3}=\frac{5\pm1}{6};\ x_1=1,\ x_2=\frac{2}{3}.$$

Следовательно, их сумма равна $x_1+x_2=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$, а произведение равно $x_1\cdot x_2=1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$.

2. Разложение квадратного трёхчлена на множители.

На практике очень удобно использовать следующее ***правило***:

1. Если x_1 и x_2 корни (действительные) квадратного трёхчлена ax^2+bx+c (а это значит, что $D>0$), то этот трёхчлен можно представить в виде:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)\ .$$

2. Если дискриминант квадратного трёхчлена равен нулю D=0, то этот трёхчлен можно представить в виде: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$ $(x=x_1=x_2)$, где x_1 - корень уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Это значит, что, зная корни квадратного уравнения, любой квадратный трёхчлен можно разложить на линейные множители.
Например, разложим на множители следующий трехчлен: $2x^2-x-15$.
Найдем корни квадратного уравнения: $2x^2-x-15=0$.

$$x_{1,2}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot2\cdot(-15)}}{2\cdot2}=\frac{1\pm11}{4};\ x_1=3,\ x_2=-2{,}5.$$

Следовательно, разложение данного трехчлена на множители имеет вид:

$$2x^2-x-15=2(x-3)(x+2{,}5).$$

Задания для решения:

67. Составить приведённое квадратное уравнение, корни которого $x_1=2$, $x_2=3$.
68. Найти p, если сумма корней уравнения $x^2+px+3=0$ равна 10.
69. Разложить на множители
а) $5x^2+3x-8$;
б) $x^2-8x+15$;
в) $3x^2-12x+12$.
70. Упростить выражение
$$\frac{2x^2-5x+2}{4-x^2}$$
71. Пусть $x=2$ – корень квадратного трёхчлена $4x^2-14x+q$. Найти q и разложить трёхчлен на множители.

3. Дробные рациональные уравнения.

Уравнения, в которых левая и правая части являются рациональными выражениями, называют ***рациональными уравнениями***. Рациональное уравнение, в котором и левая и правая части являются целыми выражениями, называют ***целыми***. Рациональное уравнение, в котором левая или правая части являются дробными выражениями, называют ***дробным***. Так, уравнение $2x+5=3(8-x)$ – целое, а $x-\frac{5}{x}=-3x+19$ или $\frac{x-4}{2x+1}=\frac{x-9}{x}$ – дробные уравнения. Рассмотрим примеры решений таких уравнений.

1) Решим целое уравнение: $\frac{x-1}{2}+\frac{2x}{3}=\frac{5x}{6}$.

Для этого умножим обе части уравнения на наименьший общий знаменатель входящих в него дробей, т.е. число 6. Получим уравнение, равносильное данному, но не содержащее дробей: $3(x-1)+4x=5$. Решив его, найдём, что $x=1{,}5$.

2) Решим дробное рациональное уравнение

$$\frac{x-3}{x-5}+\frac{1}{x}=\frac{x+5}{x(x-5)}. \qquad (1)$$

По аналогии с предыдущим примером, умножим обе части уравнения на общий знаменатель дробей, т.е. на выражение $x(x-5)$. Получим целое уравнение:

$$x(x-3)+x-5=x+5 \qquad (2)$$

Понятно, что каждый корень уравнения (1) является корнем уравнения (2). Но уравнение (2) может быть не равносильно исходному (1), так как мы умножили обе его части не на число, отличное от нуля, а на выражение, содержащее переменную, которая может обращаться в нуль. Поэтому не каждый корень уравнения (2) обязательно окажется корнем уравнения (1). Упростив уравнение (2) получим квадратное уравнение: $x^2-3x-10=0$. Его корни – числа –2 и 5. Проверим, являются ли числа –2 и 5 корнями уравнения (1). При $x=-2$ общий знаменатель $x(x-5)$ не обращается в нуль. Значит, число –2 является корнем уравнения (1). При x=5 общий знаменатель обращается в нуль и выражения $\frac{x-3}{x-5}$ и $\frac{x+5}{x(x-5)}$ теряют смысл. Поэтому число 5 не является корнем уравнения (1). Следовательно, корнем уравнения (1) служит только число –2.

Таким образом, чтобы решить дробное уравнение нужно:

1) Найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение.
2) Умножить обе части уравнения на общий знаменатель.
3) Решить получившееся целое уравнение.
4) Исключить из его корней те, которые обращают в нуль общий знаменатель.

Задания для решения:

Решить уравнения:

72. $\frac{x+1}{2x^2-3x}-\frac{4x+1}{4x^2+6x}=\frac{10}{4x^2-9}$

73. $\frac{ax-b}{a+b}+\frac{bx+a}{a-b}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

74*. $\frac{4}{9x^2-1}+\frac{1}{3x^2-x}=\frac{4}{9x^2-6x+1}$

75. $\left(\sqrt{x+a}\right)=a-\sqrt{x}$

Тема №6.

1. **Системы уравнений первой и второй степени.**
2. **Способы решения систем линейных уравнений: подстановки и алгебраического сложения.**

1. Системы уравнений первой и второй степени.

Совокупность уравнений с несколькими неизвестными называют ***системой уравнений***. Системы уравнений бывают первой и второй степени (и не только). ***Системы уравнений первой степени*** (линейные системы уравнений) – это системы вида:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (1),$$

где x, y – переменные в первой степени, $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ – постоянные коэффициенты. ***Системы уравнений второй степени*** – это система двух уравнений с двумя неизвестными, в которой оба уравнения второй степени (переменные x и y во второй степени) или одно уравнение второй, а другое – первой степени. Например:

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 12 \\ 7xy = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 9 \\ xy - 5x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 3x = 8 \\ x - y^2 = 1 \end{cases}.$$

Решить систему уравнений, значит найти множество всех общих для обоих уравнений решений.

Две системы уравнений называются ***равносильными*** (эквивалентными, при сокращении используется знак $\Leftrightarrow$), если все решения каждой из них являются и решением другой (множества решений совпадают), или если обе системы не имеют решений. Система называется ***несовместной***, если входящие в неё уравнения не имеют общих решений. Например, несовместной является следующая система уравнений:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 12 \\ 3x - 4y = 18 \end{cases}.$$

Система называется ***неопределённой***, если входящие в неё уравнения имеют бесконечное множество решений. Например:

$$\begin{cases} 7x + 6y = -42 \\ 3{,}5x + 3y = -21 \end{cases}.$$

Примечание. Не решая системы линейных уравнений, можно судить о числе ее решений по коэффициентам при соответствующих переменных. Рассмотрим систему линейных уравнений (1). Если $a_1 / a_2 \neq b_1 / b_2$, т. е. коэффициенты при x и y не пропорциональны, то система имеет единственное решение. Это решение графически иллюстрируется как точка пересечения двух прямых $a_1x + b_1y = c_1$ и $a_2x + b_2y = c_2$ (рис. 1). Если $a_1 / a_2 = b_1 / b_2 \neq c_1 / c_2$, то система решений не имеет. В этом случае прямые, служащие графиками уравнений системы, являются параллельными и не совпадающими друг с другом (рис. 2). Если $a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2$, то система имеет бесконечное множество решений. В этом случае прямые параллельны и совпадают друг с другом (рис. 3).

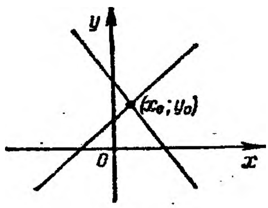


Рис. 1

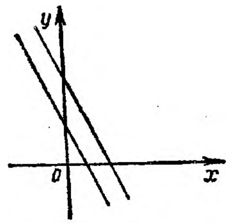


Рис. 2

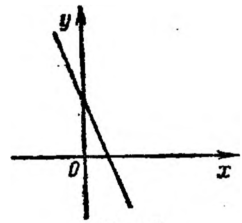


Рис. 3

Система уравнений второй степени может быть представлена в виде двух графиков – две параболы или парабола и прямая. Например, для системы уравнений $\begin{cases} y = ax^2 \\ y = -bx - c \end{cases}$ графическое решение имеет вид, показанный на рисунке 4.

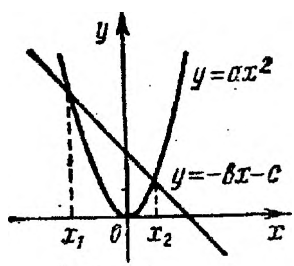


Рис. 4

2. Способы решения систем уравнений: подстановки и алгебраического сложения.

Способ алгебраического сложения.

Основной задачей данного способа является исключение одной из переменных, входящих в систему, путем умножения коэффициентов при переменных на соответствующий множитель и сложения уравнений системы. Рассмотрим пример. Пусть дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 4x + 5y = 31 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases} \qquad (2)$$

Для решения этой системы применим способы алгебраического сложения. Сделаем так, чтобы коэффициенты при одной из переменных (например, x) в данных уравнениях были равны и противоположны. Для этого умножим первое уравнение на 3, а второе на – 4:

$$\begin{cases} 4x + 5y = 31(\cdot 3) \\ 3x - 2y = 6(\cdot(-4)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x + 15y = 93 \\ -12x + 8y = -24 \end{cases} \quad (3)$$

Полученные уравнения будут равносильны первоначальным, а потому и система (3) будет равносильна исходной системе (2). Сложив уравнения системы (3), получим уравнение с одним неизвестным $23y = 69$. Добавим к этому уравнению одно из уравнений системы (2) (обычно самое простое) и получим систему (4), равносильную (3):

$$\begin{cases} 23y = 69 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}. \quad (4)$$

Далее найденное значение неизвестного y подставим во второе уравнение системы (4) и решим её:

$$\begin{cases} y = 3 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Следовательно, решением системы линейных уравнений (2) является пара чисел: $x = 4$; $y = 3$. Эти числа представляют собой точку с координатами (4; 3). Способ алгебраического сложения выгодно применять тогда, когда коэффициенты при одном из неизвестных противоположны или равны.

Способ подстановки.

Целью данного способа является выражение одной из переменных через другую (например, из первого уравнения) и подстановка этой переменной во второе уравнение. Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} 8x - 5y = -16 \\ 10x + 3y = 17 \end{cases}.$$

Выразим y через x из первого уравнения: $y = \frac{8x+16}{5}$. Но во втором уравнении y означает ту же величину, что и первом, поэтому можем подставить полученное значение y во второе уравнение: $10x + 3\frac{8x+16}{5} = 17$. Получим уравнение первой степени с одним неизвестным, из которого найдём, что $x = 0{,}5$. Теперь найдём значение другого неизвестного: $y = \frac{8x+16}{5} = 4$. То есть, получаем следующую последовательность действий:

$$\begin{cases} 8x - 5y = -16 \\ 10x + 3y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{8x+16}{5} \\ 10x + 3y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{8x+16}{5} \\ 10x + 3\frac{8x+16}{5} = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{8x+16}{5} \\ x = 0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 0{,}5 \end{cases}$$

Способ подстановки выгодно применять тогда, когда коэффициент при одном из неизвестных в одном из уравнений равен 1. Вообще для решения систем линейных уравнений применяют любой из данных способов. Системы уравнений второй степени решаются аналогично системам первой степени.

Задания для решения:

Решить системы уравнений:

76. $\begin{cases} 5x + y = 7 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$

77. $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$

78. $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 6x + 9y = 2 \end{cases}$

79. $\begin{cases} x + ay = 1 \\ ax - 3ay = 2a + 3 \end{cases}$

80. $\begin{cases} 2x^2 - xy + 3y^2 - 7x - 12y + 1 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$

81. $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 18 \\ x^2 - y^2 + x - y = 6 \end{cases}$

82. $\begin{cases} x^2y^3 = 8 \\ x^3y^2 = 4 \end{cases}$

83.* $\begin{cases} (x+y)^2 - 2(x+y) = 15 \\ xy = 6 \end{cases}$

84. $\begin{cases} x - y = 5 \\ xy = 14 \end{cases}$

Тема № 7.

1. Понятие функции и способы ее задания.
2. Свойства функции: монотонность, периодичность, четность, корни функции.
3. Линейная функция.
4. Функция $y = k/x$ и её график.
5. Квадратичная функция.
6. Обратные функции.

1. Понятие функции и способы ее задания.

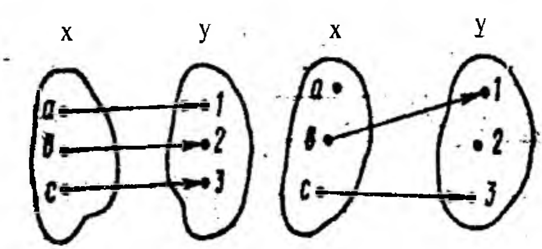


Рис. 5

Функцией называется отношение f между множествами X и Y, при котором каждому элементу $x \in X$ соответствует ***единственный*** элемент $y \in Y$. При этом используется запись $y = f(x)$. Множество X называется ***областью определения*** $D(f)$ функции, а множество Y – ***множеством*** $E(f)$ ***значений функции.*** Другими словами, если каждому значению x из некоторого множества действительных чисел поставлено в соответствии по определённому правилу не более одного числа y, то говорят, что на этом множестве задана функция от переменной x, и записывают $y = f(x)$. Функцию называют также отображением множества $D(f)$ на множество $E(f)$ (рис. 5).

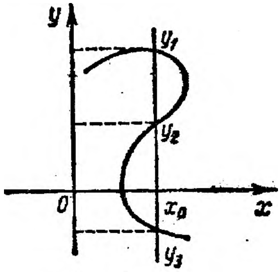


Рис. 6

Примечание: Для того, чтобы данное множество являлось графиком функции, необходимо и достаточно, чтобы прямая, параллельная оси oy, пересекалась с указанным графиком не более, чем в одной точке. Например, данная на рисунке 6 графическая зависимость, не является функцией, т. к. одному элементу из множества X соответствует более одного элемента из множества Y.

Способы задания функции.

Функция может быть задана:

1. Формулой, т.е. аналитически. Например,

$$y = x^2,\ y = \sin x \text{ или } y = \begin{cases} x, \text{ если } x \le 0 \\ x^2, \text{ если } x > 0 \end{cases} \text{ и т.д.}$$

2. Таблицей:

x	2	2,5	3	3,5	4	4,1
y	3	4	5	7	7,5	8

3. С помощью графика.

Графиком функции $y = f(x)$ называется изображение на координатной плоскости множества пар (x, y) (рис. 7).

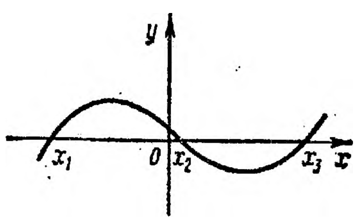


Рис. 7

2. Свойства функции: четность, монотонность, периодичность, корни функции.

Четность функции.

Функция $f(x)$ называется ***чётной***, если $f(-x)=f(x)$ для любого x из области определения функция. График чётной функции симметричен относительно оси ординат. (Область определения симметрична относительно оси ординат). Например, $y=x^2$ (рис. 8):

$$\left.\begin{array}{l} y(-1)=(-1)^2=1 \\ y(1)=1^2=1 \end{array}\right\}, \quad y(-1)=y(1).$$

Приведем примеры чётных функций:

$$y=x^2+3,\ y=-3x^2+1,\ y=|x|,\ y=\cos x,\ y=4,\ y=\frac{x^3+x}{x^3-x}.$$

Функция называется ***нечётной***, если $f(-x)=-f(x)$. График нечётной функции симметричен относительно начала координат. Например, $y=x^3$ (рис. 9): $\left.\begin{array}{l} y(-1)=(-1)^3=-1 \\ y(1)=1^3=1 \end{array}\right\} \Rightarrow y(-1)=-y(1)$.

Приведем примеры нечётных функций:

$$y=x^3+x,\ y=\frac{x}{x^2+1},\ \sin x,\ tgx,\ ctgx \text{ и т.д.}$$

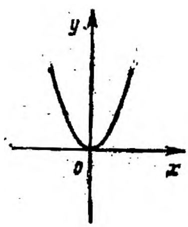


Рис. 8

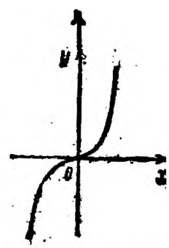


Рис. 9

Монотонность функции.

Функцию $f(x)$ называют ***монотонно возрастающей*** на данном числовом промежутке, если бо́льшему значению аргумента x соответствует бо́льшее значение функции $f(x)$, т.е. если $x_2>x_1 \Rightarrow f(x_2)>f(x_1)$ для любых x из данного промежутка. Функцию $f(x)$ называют ***монотонно убывающей*** на данном числовом промежутке, если бо́льшему значению аргумента x соответствует ме́ньшее значение функции $f(x)$, т.е. если $x_2>x_1 \Rightarrow f(x_2)<f(x_1)$

Функция, только возрастающая или только убывающая на данном числовом промежутке, называется ***монотонной*** на этом промежутке. Например, функция $y = x^2$ на промежутке $(-\infty;0)$ монотонно убывает, так как при $x_1 = -2$ и $x_2 = -1$ получаем следующие соотношения:

$$f(x_1) = f(-2) = (-2)^2 = 4$$
$$f(x_2) = f(-1) = (1)^2 = 1$$
т.е. если $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$.

Эта же функция $y = x^2$ на промежутке $(0;+\infty)$ монотонно возрастает, так как при $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$ получаем следующие соотношения:

$$f(x_1) = f(1) = 1^2 = 1$$
$$f(x_2) = f(2) = 2^2 = 4$$
т.е. если $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$.

О монотонности функции можно также судить и по ее графику. Например, функция $y = x^2$ имеет вид, показанный на рисунке 8. Функция, график которой изображен на рисунке 9, монотонно возрастает при всех значениях x.

Периодичность функции.

Функция f называется ***периодической***, если существует такое число $T \neq 0$, что при любых x из области определения функции чи́сла $x - T$ и $x + T$ также принадлежат этой области и выполняется равенство $f(x-T) = f(x) = f(x+T)$. В этом случае T называется ***периодом*** функции.

Если T – период функции, то $T \cdot n$, где $n \in Z$ – также период функции. Следовательно, всякая периодическая функция имеет бесконечное множество периодов. Но на практике обычно рассматривают наименьший положительный период. Значение периодической функции через промежуток, равный периоду, повторяются. Это обстоятельство используется при построении графиков. Примерами периодических функций являются функции $\sin x$, $\cos x$, tgx, $ctgx$.

Промежутки знакопостоянства и корни функции.

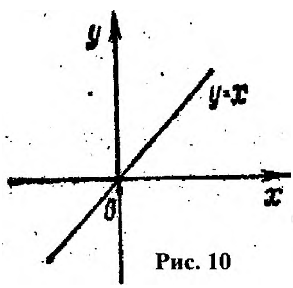


Рис. 10

Промежутки, на которых функция сохраняет свой знак (т.е. остаётся положительной или отрицательной), называются ***промежутками знакопостоянства функции.***

О промежутках знакопостоянства легко судить по графику функции. Рассмотрим, например, функцию $y = x$ (рис. 10). При $x<0$ функция принимает только отрицательные значения, т. е. при $x \in (-\infty;0)$ $f(x)<0$, график функции расположен ниже оси абсцисс *Ox*. При $x>0$ данная функция принимает только положительные значения, т. е. при $x \in (0,+\infty)$ $f(x)>0$, график функции расположен выше оси абсцисс *Ox*. Значения аргумента x, при которых $f(x)=0$ называют ***корнями*** (или нулями) функции. ***Корни функции – это геометрические места точек пересечения графика функции с осью Ox.*** На рисунке 11 изображена функция, корнями которой будут точки x_1, x_2, x_3.

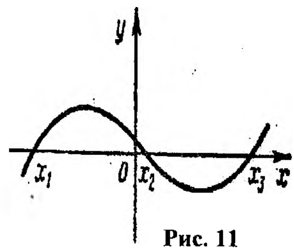


Рис. 11

3. Линейная функция.

Это функция, заданная формулой $y = kx + b$, где k, b – некоторые числа. Область определения линейной функции – вся числовая ось $(-\infty;\infty)$. График представляет собой прямую линию, для построения которой достаточно двух точек. Коэффициент k характеризует угол, который образует прямая с положительным направлением оси *Ox*, поэтому k называется угловым коэффициентом. Рассмотрим несколько видов линейной функции:

1. Если k=0,тогда функция имеет вид $y=b$.
График функции представляет собой прямую линию, параллельную оси абсцисс и проходящую через точку b на оси ординат (рис. 12).

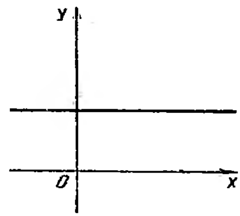


Рис. 12

2. $k \neq 0$, b=0, (k>0, k<0). Тогда функция имеет вид $y = \pm kx$. График – прямая линия, расположенная под наклоном к оси абсцисс и проходящая через центр системы координат (рис. 13, 14).

4. $k \neq 0$, $b \neq 0$, (k>0, k<0, b>0, b<0). В этом случае функция имеет вид $y = \pm kx \pm b$. График – также прямая линия, расположенная под наклоном к оси абсцисс, но не проходящая через центр системы координат, а проходящая через точку $\pm b$ на оси ординат (рис.15, 16).

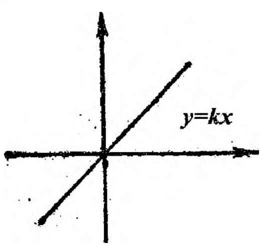


Рис. 13

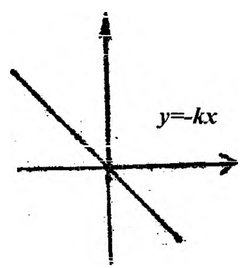


Рис. 14

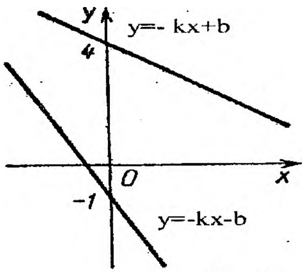


Рис. 15

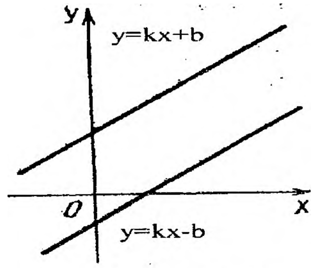


Рис. 16

4. Функция $y = k/x$ и её график.

Данная функция называется обратной пропорциональностью и имеет вид $y = \dfrac{k}{x}$, где $k \neq 0$ есть коэффициент пропорциональности. Областью определения данной функции является множество всех чисел, отличных от нуля: $x \in (-\infty;0)\cup(0;\infty)$. График функции – гипербола, состоящая из двух ветвей, симметричных относительно начала координат. Если $k > 0$, то ветви гиперболы расположены в I и III четвертях (рис. 17). Если $k < 0$, то – во II и IV четвертях (рис. 18).

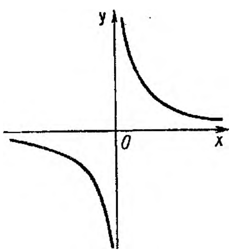


Рис. 17

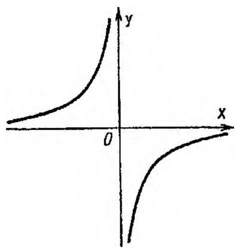


Рис. 18

5. Квадратичная функция.

Квадратичной называется функция, заданная формулой $y = ax^2 + bx + c$, где y, x - переменные, a, b, c - заданные числа, причем $a \neq 0$. Областью определения является множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$. Графиком является парабола – кривая, симметричная относительно прямой $x = -b/(2a)$, проходящей через вершину параболы (вершиной параболы называется точка пересечения параболы с её осью симметрии). Координаты вершины параболы определяются по формулам: $x_0 = -b/2a$, $y_0 = f(x_0) = (4ac - b^2)/4a$, или с помощью метода выделения полного квадрата (пример рассмотрен ниже).

Существует несколько вариантов квадратичной функции в зависимости от знака и значений постоянных коэффициентов a, b, c:

1. Если $b, c = 0$, то квадратичная функция принимает вид: $y = ax^2$. Графиком такой функции является парабола, вершина которой проходит через центр системы координат, а ветви ее направлены вверх, если $a>0$ (рис. 19), и вниз, если $a<0$ (рис. 20).

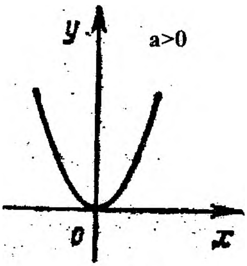


Рис. 19

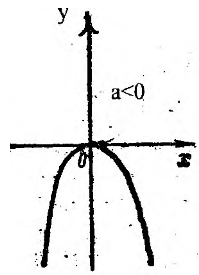
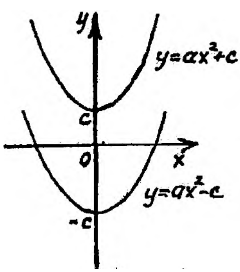
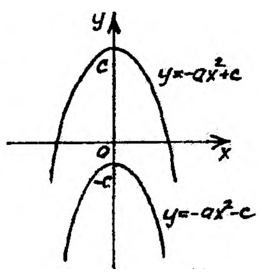


Рис. 20

2. Если $b = 0$, тогда функция принимает вид: $y = ax^2 + c$. В данном случае парабола смещается по оси ординат вверх, если $c>0$ и вниз, если $c<0$ (рис. 21, 22).
3. Если ни один из коэффициентов не равен нулю, тогда функция принимает полный вид $y = ax^2 + bx + c$. Графиком функции также является парабола, у которой ветви будут направлены либо вверх ($a>0$), либо вниз ($a<0$). Пересечение с осью ординат будет в точке с координатами ($x=0$, $y=c$), и появится смещение вправо или влево по оси абсцисс в зависимости от соотношения коэффициентов *а, в, с*. Некоторые примеры таких парабол показаны на рисунке 23.





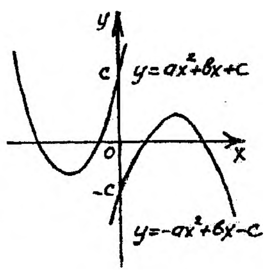


Рис. 21 **Рис. 22** **Рис. 23**

При построении графика квадратичной функции можно применять два метода: ***метод выделения полного квадрата и построение графика по характерным точкам.*** Рассмотрим оба способа на конкретном примере. Построим график функции $y = 3x^2 + 12x + 10$ двумя способами.

Метод выделения полного квадрата.

Квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$ всегда можно привести к виду $y = a(x+k)^2 + p$, где $(x+k)^2$есть полный квадрат двучлена, и затем построить её график с помощью геометрических преобразований. Выделим полный квадрат из данной функции:

$$y = 3x^2 + 12x + 10 = 3(x^2 + 4x) + 10 = 3(x^2 + 4x + 4) - 12 + 10 = 3(x+2)^2 - 2\,.$$

Дальнейшая последовательность действий такова: сначала строим график функции $y = 3x^2$. Затем, используя параллельный перенос, смещаем параболу по оси абсцисс влево на –2 (так как в квадрате двучлена второе слагаемое +2, его нужно взять с противоположным знаком). Опускаем график функции $y = 3(x+2)^2$ вниз по оси ординат на –2, так как коэффициент *c* в новой функции равен –2 (аналогично пункту 2). В результате получаем график-параболу функции $y = 3x^2 + 12x + 10$ с вершиной в точке $(-2;-2)$ (рис. 24).

Метод построения графика по характерным точкам.

Характерными точками для построения графика любой функции являются следующие точки: корни функции (или точки пересечения графика функции с осью абсцисс *Ox*), точки пересечения графика функции с осью ординат *Oy* и вершина параболы исследуемой квадратичной функции.

Найдем характерные точки для предложенной ранее функции $y = 3x^2 + 12x + 10$.

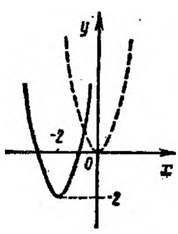


Рис. 24

1) Точки пересечения графика функции с осью *Ox* (y=0):

$$3x^2 + 12x + 10 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4\cdot 3\cdot 10}}{6} = \frac{-12 \pm \sqrt{24}}{6} \approx \frac{-12 \pm 4{,}9}{6}$$

$$x_1 \approx -1{,}8 \qquad x_2 \approx -2{,}8$$

Получили точки $(-1{,}8;\, 0)$ и $(-2{,}8;\, 0)$.

2) Точки пересечения графика функции с осью *Oy*, $(x = 0)$: $y(0) = 3\cdot 0^2 + 12\cdot 0 + 10 = 10$.

Получили точку $(0,10)$.

3) Ветви параболы направлены вверх, так как $a=3>0$.

4) Вершину параболы можно найти по формулам:

$$x_0 = -\frac{b}{2a};\ y_0 = f(x_0) = (4ac - b^2)/4a.$$

Для предложенной функции $b = 12$, $a = 3$. Следовательно, $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{12}{2 \cdot 3} = -2$. Подставим найденное значение для x_0 в выражение для функции и получим: $y_0 = f(x_0) = 3(-2)^2 + 12(-2) + 10 = 12 - 24 + 10 = -2$. Таким образом, вершина параболы имеет координаты $(-2;-2)$. После того, как все характерные точки найдены, можно строить график функции по этим точкам (рис.24).

Примечание. При построении графиков функций вида $y = ax^2 + bx = c$ можно применить любой из описанных способов. В дальнейшем для построения графиков функций будут использованы и другие характерные точки, которые будут изучены в разделе «Исследование функции с помощью производной».

6. Обратные (взаимно обратные) функции.

В ходе исследования различных функций мы неоднократно решали задачу вычисления значения функции $y = f(x)$ по известному значению аргумента x_0. Часто приходится рассматривать и обратную задачу: найти значения аргумента, при которых функция f принимает данное значение y_0. Пусть функция $y = f(x)$ монотонна в своей области определения $D(f)$. Тогда каждому $x \in D(f)$ соответствует единственный $y \in E(f)$ и обратно, каждое значение $y \in E(f)$ соответствует единственному $x \in D(f)$.Такую функцию, принимающую каждое свое значение в единственной точке области определения называют ***обратимой***. В этом случае можно построить новую функцию g, имеющую область определения $E(f)$ и область значений $D(f)$, такую, что каждому $y \in E(f)$ ставится в соответствии $x \in D(f)$, удовлетворяющую уравнению $g(y) = x$. Эта функция $g(y) = x$ называется ***обратной*** для функции $y = f(x)$. Сформулируем данное определение короче: функцию g, которая в каждой точке x области значений обратимой функции f принимает такое значение y, что $g(y) = x$, называют ***обратной*** к функции f.

Приведем ***алгоритм нахождения обратной функции*** на конкретном примере. Найдём обратную функцию для функции $y = x^2$, заданную на промежутке $]-\infty;0]$.

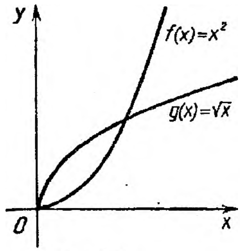


Рис. 25

1) На этом промежутке функция монотонно убывает и принимает все значения из множества $[0;+\infty[$. Следовательно, для данной функции существует обратная.

2) Из уравнения $y = x^2$ выражаем x и находим, что:

$x = \sqrt{y}$ или $x = -\sqrt{y}$ (это и будет новая функция g). Так как переменная может принимать только неположительные значения, то искомая обратная функция имеет вид $x = -\sqrt{y}$.

3) Поменяв обозначения x на y и y на x, получим формулу: $y = -\sqrt{x}$, где $x \geq 0$, с помощью которой и задаётся обратная функция.

Если же рассматривать функцию $y = x^2$ на промежутке $[0;\infty[$, то обратной для неё будет функция $y = \sqrt{x}$, где $x \geq 0$ (рис. 25).

Таким образом, для нахождения функции, обратной данной $y = f(x)$***, необходимо:***

1) Определить, является ли данная функция обратимой.

2) Выразить x через y: $x = g(y)$.

3) Записать полученную функцию в общепринятой форме $y = g(x)$ (поменять местами x и y).

Примечание: Отметим, что если функция $y = f(x)$ и $y = g(x)$ являются взаимно обратными, то область определения функции f совпадает с множеством значений функции g и, наоборот, область определения функции g - с множеством значений функции f, т.е. $D(f) = E(g)$ и $D(g) = E(f)$. Графики взаимообратных функций симметричны относительно прямой $y = x$. Примеры некоторых взаимнообратных функций приведены на рисунке 26.

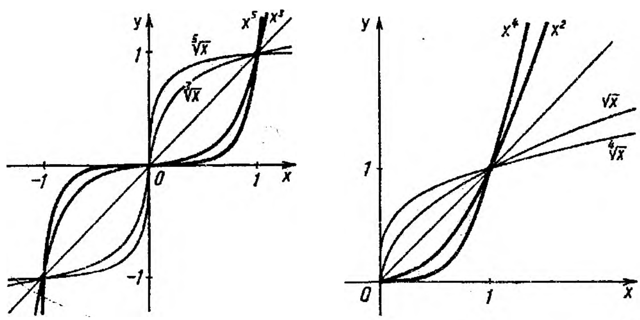


Рис. 26

Задания для решения:

Найти область определения функций:

85. $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$

86. $y = \sqrt{4 - x^2}$

87. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$

88. Доказать, что функция $f(x) = \dfrac{x^3 + x}{x^3 - x}$ – чётная.

89. Доказать, что функция $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ – нечётная.

90. Нарисовать эскиз графика любой функции, которая:

а) возрастает на интервале $(-\infty; 2]$ и убывает на интервале $[2; \infty)$;

б) возрастает на промежутках $(-\infty; -2]$ и $[0;1]$, и убывает на интервалах $[-2;0]$ и $[1;\infty)$.

91. Построить графики функций:

а) $y = -2(x-1)(x+3)$ д) $y = x^2 - x$ и) $y = -2/(x-1)$

б) $y = \begin{cases} x, \text{ если } x \le 0 \\ x^2, \text{ если } x > 0 \end{cases}$ е) $y = x^2 + x$

в) $y = \begin{cases} 1, \text{ если } x > 0 \\ -1, \text{ если } x < 0 \end{cases}$ ж) $y = x - x^2$

г) $y = -2x^2 + 4x + 1$ з) $y = -2/x$

92. В каких координатных углах расположен график функции?

а) $y = -6/x$

б) $y = 4/x$

93. Вывести формулу, задающую функцию g, обратную к данной функции f:

а) $f(x) = 2x + 1$ г) $f(x) = -\dfrac{1}{2}x - 1$

б) $f(x) = -2x + 1$ д) $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$

в) $f(x) = \dfrac{1}{2}x - 1$ е) $f(x) = -\dfrac{1}{x}$.

Тема №8.

1. Степенная функция с целым положительным показателем ($n \in Z_+$).

2. Степенная функция с целым отрицательным показателем $n \in Z_-$.

3. Степенная функция с дробным положительным показателем $n = \frac{1}{k}$.

4. Показательная функция, её свойства и график.

5. Показательные уравнения.

Степенная функция – это функция вида $y = x^n$, где n может быть: 1) целым положительным числом; 2) целым отрицательным числом; 3) дробным положительным числом. Рассмотрим все возможные варианты функции $y = x^n$.

1. Степенная функция с целым положительным показателем $y = x^n$, ($n \in Z_+$).

Область определения данной функции – множество R всех действительных чисел. При любом n график проходит через начало координат и через точку (1; 1).

а) Если n – четное число (n=2, 4, 6,...), то функция является четной и ось Oy служит осью симметрии графика. Например, при $n = 2$ функция имеет вид уже упоминавшейся раньше квадратичной функции $y = x^2$. Ее графиком будет парабола (рис. 27). При возрастании n парабола будет приобретать все большую крутизну (рис. 28).

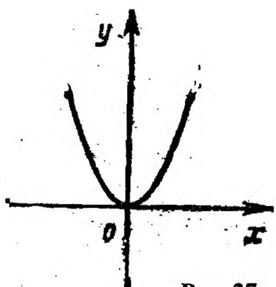


Рис. 27

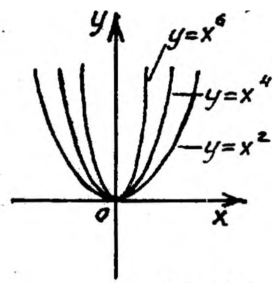


Рис. 28

б) Если n – нечетное число ($n = 3,5,7...$), то функция является нечетной и начало координат служит центром симметрии графика. Например, при n=3 получим функцию $y = x^3$. Графиком ее будет кубическая парабола (рис. 29). При возрастании n кубическая парабола будет также приобретать все большую крутизну (рис. 30).

в) Если $n=1$, тогда степенная функция имеет вид $y=x^1=x$. Графиком будет являться прямая линия $y=x$, изображенная на рисунке 31.

г) Если $n=0$, тогда степенная функция приобретает вид: $y=x^0=1$. Графиком функции будет прямая $y=1$, из которой удалена точка (0;1), поскольку область определения этой функции – множество всех действительных чисел, кроме нуля (рис. 32).

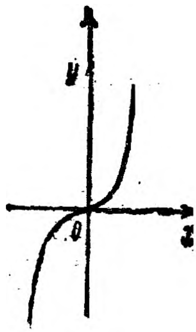


Рис. 29

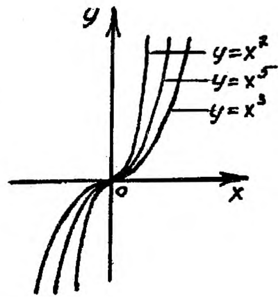


Рис. 30

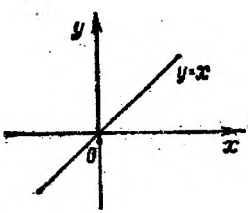


Рис. 31

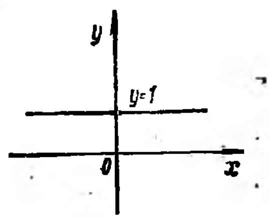


Рис. 32

2. Степенная функция с целым отрицательным показателем, $n \in Z_-$, $y=x^{-n}$.

Область определения степенной функции с целым отрицательным показателем – множество всех действительных чисел, кроме нуля, т.е. $D(f) \in \left]-\infty;0\right[\cup\left]0;+\infty\right[$.

а) Если n – четное число ($n = -2, -4, -6...$), то функция является четной и ось Oy является осью симметрии графика. Например, при $n = -2$, функция имеет вид: $y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$. График данной функции изображен на рисунке 33. При других четных n графики функций выглядят аналогично и располагаются в 1 и 2 координатных четвертях.

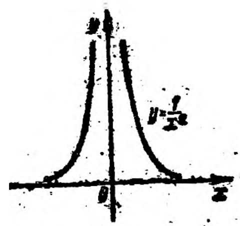


Рис. 33

б) Если n – нечётное ($n = -1, -3, -5...$), то функция является нечётной и её график симметричен относительно начала координат. Например, если $n = -1$, тогда функция имеет вид: $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$. Графиком такой функции будет гипербола (рис. 34). При других нечетных n графики функций выглядят аналогично, т. е. также являются гиперболами, расположенными в I и III координатных четвертях.

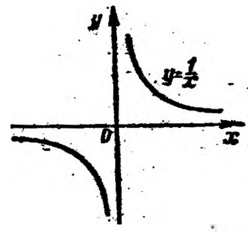


Рис. 34

3. Степенная функция с дробным положительным показателем,

$$y = x^n = x^{\frac{1}{k}}, \ (n = \frac{1}{k}, \ k > 1, \ k \in N) \text{ или } y = \sqrt[k]{x}.$$

1) Область определения данной функции: $[0;+\infty[$.

2) Множеством значений ее также является луч $[0;+\infty[$

3) Функция является монотонно возрастающей на всей области определения и $y = \sqrt[k]{x}$ будет обратной для функции $y = x^k$.

Этим свойством можно воспользоваться для построения графика функции $y = \sqrt[k]{x}$, где $x \in [0;+\infty[$, $k \in N$, $(k > 1)$ (графики взаимообратных

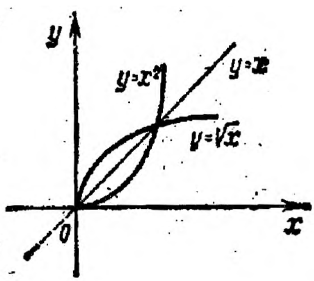


Рис. 35

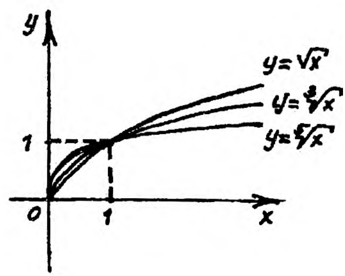


Рис. 36

функций симметричны относительно прямой $y = x$). Например, график функции $y = \sqrt{x}$ симметричен графику $y = x^2$ относительно прямой $y = x$ (рис. 35). Значение функции равно нулю только при $x = 0$.

4) Графики функций $y = \sqrt[k]{x}$ на интервале $[0;+\infty[$ при различных k имеют вид изображенный на рис. 36 и все проходят через точку (1; 1), поскольку $\sqrt[k]{1} = 1$.

4. Показательная функция, её свойства и график.

Функция, заданная формулой $y = a^k$, где a – некоторое положительное число, не равное единице, называется ***показательной.***

Функция $y = a^k$ при $a > 1$ обладает следующими свойствами:

1) График функции имеет вид: см. рис. 37.
2) Область определения – множество всех действительных чисел $D(f) \in R$.
3) Область значений – множество всех положительных чисел $E(f) \in R_+$.
4) Функция возрастает на всей области определения.
5) При $x = 0$ значение функции равно 1.
6) Если $x > 0$, то $a^x > 1$.
7) Если $x < 0$, то $0 < a^x < 1$.

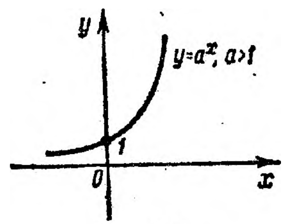


Рис. 37

Функция $y = a^x$ при $0 < a < 1$ обладает следующими свойствами:

1) График функции имеет вид: рис. 38.
2)Область определения – множество всех действительных чисел $D(f) \in R$.
3)Область значений – множество всех положительных чисел $E(f) \in R_+$.
4) Функция убывает на всей области определения.
5) При $x = 0$ значение функции равно 1.
6) Если $x > 0$, то $0 < a^x < 1$.
7) Если $x < 0$, то $a^x > 1$.

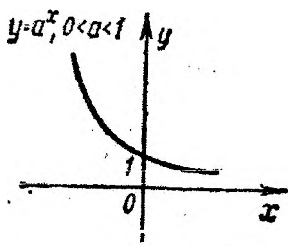


Рис. 38

Примечание. При $a = 1$ функция $y = a^x$ постоянна, так как $1^x = 1$ для любого рационального x.

5. Показательные уравнения.

Уравнение, содержащее переменную в показателе степени, называется ***показательным.*** Простейшим примером показательного уравнения служит уравнение $a^x = b$, где $a > 0, a \neq 1$. Любое сложное показательное уравнение должно быть приведено к виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ и дальнейшее его решение основано на том, что это уравнение равносильно уравнению $f(x) = g(x)$. Рассмотрим некоторые примеры решения показательных уравнений.

Пример №1. Решить уравнение $3^{x^2-(5/7)x} = \sqrt[7]{9}$.

Первоначальной задачей при решении показательных уравнений является приведение обеих частей уравнения к одному основанию. Представим $\sqrt[7]{9}$ как $3^{2/7}$ и получим $3^{x^2-(5/7)x} = 3^{2/7}$. Таким образом, левая и правая части уравнения приведены к единому основанию (к виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$). Следовательно, данное уравнение равносильно квадратному уравнению $x^2 - (5/7)x = 2/7$, откуда $x_1 = -2/7;\ x_2 = 1$.

Пример № 2. Решить уравнение $6^{x+1} + 35 \cdot 6^{x-1} = 71$.

Заметим, что $6^{x+1} = 6^2 \cdot 6^{x-1} = 36 \cdot 6^{x-1}$. Поэтому данное уравнение можно записать в виде $36 \cdot 6^{x-1} + 35 \cdot 6^{x-1} = 71$. Вынося за скобки общий множитель 6^{x-1}, получим $71 \cdot 6^{x-1} = 71$, откуда $6^{x-1} = 1$, $x - 1 = 0, x = 1$. Это и есть решение данного уравнения.

Задания для решения:

Решить показательные уравнения:

94. $5^x = 125$;

95. $3^x = \dfrac{1}{81}$;

96. $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{3^x} = 36$;

97. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \left(\dfrac{3}{2}\right)^4$;

98. $3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} = 13$;

99. $7^x - 7^{x-1} = 6$;

100. $5^{x+1} - 5^{x-1} = 24$;

101. $5^{2x} - 5^x - 600 = 0$;

102. $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\dfrac{7}{3}\right)^{7x-3}$;

103. $\sqrt[4]{a^{x+1}} = \sqrt[5]{a^{x-2}}$, $(a > 0)$;

104. $4^x + 2^{x+1} = 80$;

105. $a^{(x-2)(x-3)} = 1$, $(a > 0)$;

106. $5^x \cdot (\frac{1}{5})^{x-3} = \left(\dfrac{1}{125}\right)^x$;

107. $3^x + 9^{x-1} - 810 = 0$.

Тема №9.

1. **Понятие логарифма. Свойства логарифмов.**
2. **Логарифмическая функция и её график.**
3. **Логарифмические уравнения.**

1. Понятие логарифма. Свойства логарифмов.

Логарифмом числа b по основанию a (где $a>0, a\neq 1$) называется показатель степени, в которую надо возвести a, чтобы получить число b ($a^{\log_a b}=b$) и обозначается символом $\log_a b$. Поэтому равенство $a^{\log_a b}=b$ есть тождество, которое называют ***основным логарифмическим тождеством.*** Например: $3^{\log_3 6}=6$; $6^{\log_6 7}=7$.

Кроме обычных логарифмов существуют ***десятичные*** (логарифмы по основанию 10) и ***натуральные логарифмы*** (логарифмы по основанию e $(a=e=2{,}7)$). Для обозначения этих логарифмов принята несколько другая запись: для ***десятичных логарифмов*** вместо $\log_{10} b$, где $в$ – произвольное положительное число, пишут $\lg b$; для ***натуральных*** – вместо $\log_e b$ пишут $\ln b$.

Основные свойства логарифмов:

1. $\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y$;

2. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$;

3. $\log_a x^k=k\cdot\log_a x$;

Частными случаями свойства №3 являются:

3а. $\log_a\left(\dfrac{1}{b}\right)=-\log_a b$; **3б.** $\log\sqrt[n]{x}=\dfrac{1}{n}\log_a x$;

4. Формула перехода к новому основанию:

$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, например: $\log_5 25=\dfrac{\log_3 25}{\log_3 5}$;

5. $\log_a 1=0$, так как $a^0=1$;

6. $\log_a a=1$, так как $a^1=a$.

Примечание. Свойства 1 – 4 доказываются с помощью соответствующих теорем (в данном пособии доказательства не приводятся).

Дополнительны свойства логарифмов:

1. Логарифмы существуют только для положительных чисел, т.е. $\log_a N$ (где $a>0, a\neq 1$) существует, если $N>0$.

2. При основании $a>1$, логарифмы чисел $N>1$ положительны, а логарифмы чисел $0<N<1$, например: $\log_2 5>0, \log_3\left(\frac{1}{2}\right)<0$.
3. При основании $0<a<1$ логарифмы чисел $N>1$ отрицательны, а логарифмы чисел $0<N<1$ положительны.
   Например: $\log_{1/2} 5<0$, $\log_{1/2}\left(\frac{1}{3}\right)>0$.
4. Равным положительным числам соответствуют и равные логарифмы, т.е. если $N_1=N_2$, то $\log_a N_1=\log_a N_2$.
5. Если $a>1$, то большему числу соответствует и больший логарифм, т.е. если $N_1>N_2$, то $\log_a N_1>\log_a N_2$, например: $\log_3 7>\log_3 5$.
6. Если $0<a<1$, то большему числу соответствует меньший логарифм, т.е. если $N_1>N_2$, то $\log_a N_1<\log_a N_2$. Например: $\log_{1/3} 9<\log_{1/3} 7$.

Некоторые свойства десятичного логарифма:

Эти свойства вытекают из основных свойств для всех видов логарифмов.

1. $\lg 10^n=n$;   **2.** $\lg 10^{-n}=-n$;   **3.** $\lg 10=1$.

2. Логарифмическая функция и её график.

Так как показательная функция $y=a^x$, где $a>0, a\neq 1$, является монотонной (возрастающей при $a>1$ и убывающей при $0<a<1$), то она имеет обратную функцию, область определения которой – множество R_+ положительных чисел, а область значений – множество R. Такую функцию называют ***логарифмической с основанием*** a ***и обозначают*** $y=\log_a x$. Чтобы найти эту функцию, нужно из формулы $y=a^x$ выразить x через y: $x=\log_a y$, а затем поменять обозначения x на y, а y на x; тогда получим $y=\log_a x$ (см. тему № 7, п. 6).

Таким образом, логарифмическая и показательная функции являются при одном и том же основании взаимообратными функциями (т.е. $y=a^x$ взаимообратная для $y=\log_a x$).

Свойства функции $y=\log_a x$ при $a>1$.

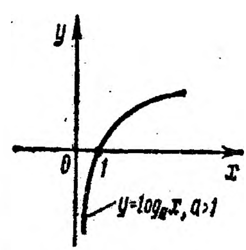


Рис. 39

1) Область определения – множество положительных чисел $D(f)=R_+$
2) Множество значений – множество всех действительных чисел $E(f)=R$
3) Функция возрастает во всей области определения.

4) При $x=1$ получим $\log_a x = 0$.
5) При $0 < x < 1$ получим $\log_a x < 0$.
6) Если $x > 1$, то $\log_a x > 0$.
7) График функции $y = \log_a x$ при $a > 1$ показан на рисунке 39.

Свойства функции $y = \log_a x$ при $0 < a < 1$.

1) Область определения положительных чисел $D(f) = R_+$.
2) Область значений - множество всех действительных чисел $E(f) = R$.
3) Функция убывает во всей области определения.
4) При $x = 1$ получим $\log_a x = 0$.
5) При $0 < x < 1$ получим $\log_a x > 0$
6) Если $x > 1$, то $\log_a x < 0$.
7) График функции $y = \log_a x$ при $0 < a < 1$ показан на рисунке 40.

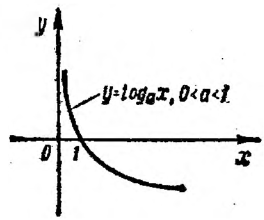


Рис. 40

3. Логарифмические уравнения.

Уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма, называется логарифмическим. Простейшим примером логарифмического уравнения служит уравнение $\log_a x = b$, где $a > 0, a \neq 1$.

Задания для решения:

Прологарифмировать по основанию 10 следующие выражения:

108. $x = 3a^2$

109. $x = 15a^3b^3c^7$

110. $x = a^2 \cdot \sqrt[7]{ab^5}$

111. $x = a\sqrt[3]{ab^2}$

112. $x = \dfrac{a+b}{a-b} \cdot \sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}$

113. $x = \sqrt[4]{\dfrac{a^3}{b^2}}$

Решить уравнения:

114. $\lg(\lg x) = 0$

115. $\log_x 2 - \log_x 3 = 4$

116. $\lg x = -\lg 2$

117. $100^{\lg(x+20)} = 10000$

118. $2 \cdot \log_3 x = \dfrac{7}{4} \log_3\left(\dfrac{x}{5}\right)$

119. $\lg(0{,}5 + x) = \lg 2 - \lg x$

120. $\log_{\sqrt[3]{4}}(x-1) = 6$

121. $\log_3(x^2 - 4x - 5) = \log_3(7 - 3x)$

122*. $\log_x 5\sqrt{5} - 1{,}25 = \log_x^2 \sqrt{5}$

Найти область определения и построить графики функций:

123. $\log_3(x-5)$

124. $\log_{0,3}(7-x)$

Тема № 10.

1. **Тригонометрические функции числового аргумента.**
2. **Основные тригонометрические тождества.**
3. **Формулы сложения.**
4. **формулы приведения.**

1. Тригонометрические функции числового аргумента.

При изучении тригонометрических функций удобно и целесообразно пользоваться радианной мерой измерения угловых величин (и соответствующих им дуг). За ***1 радиан*** принимается величина центрального угла, которому соответствует дуга окружности, длина которой равна радиусу (рис.41).

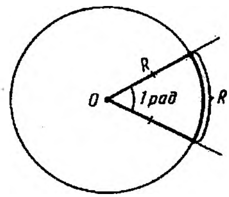


Рис. 41

Число радианов, содержащихся в данном центральном угле (или в соответствующем ему дуги), служит радианной мерой этого угла. Радианная и градусная меры связаны между собой зависимостью $180^0 = \pi$ радиан. Угол в n^0 равен $\frac{\pi}{180^0} n^0$ радиан. Например, углу в 150^0 соответствует радианная мера $\left(\frac{\pi}{180}\right) \cdot 150 = \frac{5\pi}{6}$ радиан.

Определения тригонометрических функций.

Тригонометрическими функциями называются функции вида: cosα, sinα, tgα, ctg α. Для определения этих функций рассмотрим прямоугольный треугольник ABC (рис. 42). Тогда введем следующие определения:

Синусом угла α называется отношение:

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}.$$

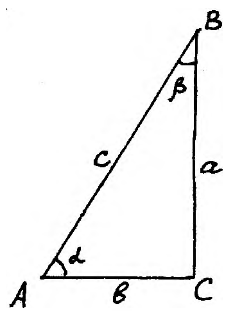


Рис.42

Косинусом угла α называется отношение:

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}.$$

Тангенсом угла α называется отношение:

$$tg\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{b}.$$

Котангенсом угла α называется отношение:

$$ctg\alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{b}{a}.$$

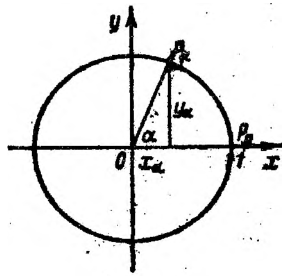


Рис. 43

Теперь рассмотрим окружность произвольного радиуса R с центром в начале координат. Можно заметить, что при повороте точки P_0 на угол α точка P_α имеет координаты (x, y) (рис. 43). Тогда, пользуясь вышеуказанными определениями тригонометрических функций, получим: $\sin\alpha = \frac{y}{R}$; $\cos\alpha = \frac{x}{R}$; $tg\alpha = \frac{y}{x}$, $ctg\alpha = \frac{x}{y}$ (аналогично рассмотренному раньше треугольнику ABC). Положим $R = 1$ (для упрощения вычислений) и получим окружность единичного радиуса (или единичную окружность). Отсюда следует, что: $\begin{matrix}\sin\alpha = y \\ \cos\alpha = x\end{matrix}$ (рис. 44). Таким образом, ***ордината*** точки P_α единичной окружности, полученной при повороте точки $P_0(1;0)$ на угол α радиан, называется ***синусом*** угла α. ***Абсцисса*** этой точки – ***косинусом*** угла α. Для тангенса и котангенса также получаем соответствующие выражения: $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

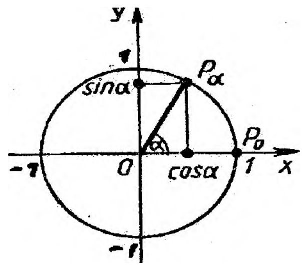


Рис. 44

Примечание. Если произвести поворот точки P_0 на угол $\alpha + 2\pi n$, где $n \in Z$, то снова получим точку $P_\alpha = P_{\alpha+2\pi n}$. Тем самым задаётся отображение $\alpha \to P_\alpha$, или функциональное соответствие между множеством величин углов в радианах и множеством точек единичной окружности. В свою очередь, каждой точке P_α окружности соответствует единственная ордината $y_\alpha = \sin\alpha$ и единственная абсцисса $x_\alpha = \cos\alpha$. Следовательно, между множеством действительных чисел и множеством соответствующих им значений синуса и косинуса существует ***функциональное соответствие***. Таким образом, тригонометрические функции можно рассматривать как функции числового аргумента. То есть, любому углу поворота α соответствует вполне определённая точка P_α и, следовательно, $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ являются функциями угла α. Кроме того, так как радиус $R^{\alpha+360k} = R_\alpha$, то и абсцисса $x_{\alpha+360^0 k} = x_\alpha$ и ордината $y_{\alpha+360^0 k} = y_\alpha$. Значит, $\sin(\alpha+360^0 k) = \sin\alpha$, $\cos(\alpha+360^0 k) = \cos\alpha,\ k \in Z$. Следовательно, ***синус и косинус – периодические функции с периодом 360^0.***

Значения синуса, косинуса, тангенса для различных углов.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1
$tg\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	0	$\sqrt{3}$	–	0
$ctg\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	–	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	–

Знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса в различных четвертях единичной окружности.

С помощью единичной окружности, разделенной на четыре четверти по 90^0 в каждой, можно быстро определить знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса для различных углов (рис. 45):

Рис. 45

2. Основные тригонометрические тождества.

Определим тождества, определяющие связь между основными тригонометрическими функциями. Так как точка P_α имеет координаты (x_α, y_α) и принадлежит единичной окружности, то уравнение $x_\alpha^2 + y_\alpha^2 = 1$ будет уравнением этой окружности. Следовательно:

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$

2. $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$
$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

3. $tg\cdot ctg\alpha = 1$

4. $1 + ctg^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

5. $1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, $(\cos\alpha \neq 0)$

$tg\alpha = 1/ctg\alpha$

6. $ctg\alpha = \dfrac{1}{tg\alpha}$, $(\sin\alpha \neq 0)$.

3. Формулы сложения.

1. Синус суммы и разности двух аргументов:
   $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$
   $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$
2. Косинус суммы и разности двух аргументов:
   $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$
   $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$
3. Тангенс суммы и разности двух аргументов:
   $tg(\alpha+\beta) = \dfrac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\cdot tg\beta}$
   $tg(\alpha-\beta) = \dfrac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha\cdot tg\beta}$

4. Формулы приведения.

Формулами приведения называют соотношения, с помощью которых (используя периодичность функций $\sin\alpha, \cos\alpha, tg\alpha, ctg\alpha$) значения тригонометрических функций аргументов $90^0 \pm \alpha$, $180^0 \pm \alpha$, $270^0 \pm \alpha$, $360^0 \pm \alpha$ выражаются через значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$, $ctg\alpha$. Результатом являются следующие соотношения:

Для синуса

1. $\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha$
2. $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$
3. $\sin(270^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$
4. $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$
5. $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$
6. $\sin(270^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$

Для косинуса:

1. $\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha$
2. $\cos(180^\circ+\alpha)=-\cos\alpha$
3. $\cos(270^\circ+\alpha)=\sin\alpha$
4. $\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha$
5. $\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$
6. $\cos(270^\circ-\alpha)=-\sin\alpha$

Все формулы приведения можно представить в виде таблицы:

аргумент / функция	$90^\circ-\alpha$	$90^\circ+\alpha$	$180^\circ-\alpha$	$180^\circ+\alpha$	$270^\circ-\alpha$	$270^\circ+\alpha$	$360^\circ-\alpha$	$360^\circ+\alpha$
sin	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
tg	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$
ctg	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$

Например, используя формулу приведения, можно гораздо быстрее вычислить $\sin 240^\circ$ по сравнению с таким же заданием, выполненным с помощью формул сложения:

$$\sin 240^\circ=\sin(180^\circ+60^\circ)=-\sin 60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Задания для решения:

125. Упростить выражение:
$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha-\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$

126. Найти $\cos\alpha, tg\alpha$, если $\sin\alpha=0{,}6$ и $0^0<\alpha<90^0$

127. Найти $\cos\alpha, tg\alpha$, если $\sin\alpha=0{,}8$ и $90^0<\alpha<180^0$

128. Найти $\sin\alpha, tg\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$ и $90^0<\alpha<180^0$

129. Найти $\sin\alpha,\cos\alpha$, если $tg\alpha=-2$ и $90^0<\alpha<180^0$

130. Найти $\sin\alpha,\cos\alpha$, если $tg\alpha=-3$ и $90^0<\alpha<180^0$

131. Вычислить, используя формулы сложения (без таблиц)

а) $\sin 240^\circ, \cos 240^\circ, tg 240^\circ$

б) $\cos 15^\circ$

в) $tg 135^\circ$

г) $tg 75^\circ$

132. Используя формулы приведения, вычислить:

а) $\cos 240^\circ$

б) $tg 240^\circ$

е) $\sin 315^\circ$

ж) $\cos 315^\circ$

в) $\sin(-1560^\circ)$ **з)** $tg315^\circ$

г) $\cos(-1560^\circ)$

д) $tg(-1560^\circ)$

133. Упростить выражение:

$$\frac{tg(180^\circ-\alpha)\cos(180^\circ-\alpha)tg(90^\circ-\alpha)}{\sin(90^\circ+\alpha)ctg(90^\circ+\alpha)tg(90^\circ+\alpha)}.$$

Тема № 11.

1. Свойства тригонометрических функций, графики.

2. Тригонометрические функции двойного и половинного аргумента, преобразования тригонометрических функций.

3. Теоремы косинусов и синусов.

1. Свойства тригонометрических функций, графики.

Функция синус угла *α (sinα)*.

1) Область определения – вся числовая $D(\sin\alpha)\in\left]-\infty;+\infty\right[$.
2) Множество значений $E(\sin\alpha)\in[-1;1]$.
3) Синус – нечётная функция, так как $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$.
4) Периодичность: функция периодичная, период $\sin\alpha$ равен 2π (360°).
5) Монотонность: функция $\sin\alpha$ монотонно возрастает от -1 до 1 на промежутке $\alpha\in[-\pi/2+2\pi k;\ \pi/2+2\pi k]$, $k\in Z$ и монотонно убывает от 1 до -1 на промежутке $\alpha\in[\pi/2+2\pi k;\ 3/2\pi+2\pi k]$, $k\in Z$.
6) Нули функции: *sinα=0,* когда $\alpha=\pi k, k\in Z$.
7) Максимальное значение функция принимает $\max(\sin\alpha)=1$ в точках $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$; минимальное $\min(\sin\alpha)=-1$ в точках $\frac{3}{2}\pi+2\pi k, k\in Z$.
8) График функции ***sinα*** показан на рисунке 46.

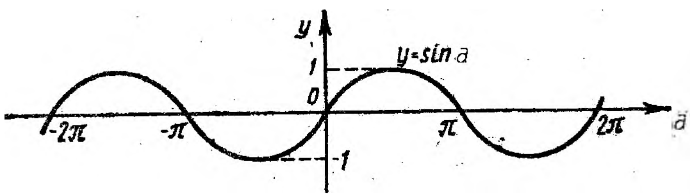


Рис. 46

Функция косинус угла *α (cosα)*.

1) Область определения – вся числовая прямая $D(\sin\alpha) \in \left]-\infty;+\infty\right[$.
2) Множество значений $E(\cos\alpha) \in [-1;1]$.
3) Косинус – чётная функция, т.к. $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.
4) Периодичность: период $\cos\alpha$ равен 2π (360°).
5) Монотонность:
   функция $\cos\alpha$ монотонно возрастает от -1 до 1 на промежутке $\alpha \in [-\pi + 2\pi k]$, $k \in Z$ и монотонно убывает от 1 до -1 на промежутке $\alpha \in [2\pi k, \pi + 2\pi k]$, $k \in Z$.
6) Нули функции: *cosα=0*, когда $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.
7) Максимальное значение $\max(\cos\alpha) = 1$ в точках $\alpha = 2\pi k, k \in Z$
   Минимальное значение $\min(\cos\alpha) = -1$ в точках $\alpha = \pi \pm 2\pi k, k \in Z$
8) График функции ***cosα*** показан на рисунке 47.

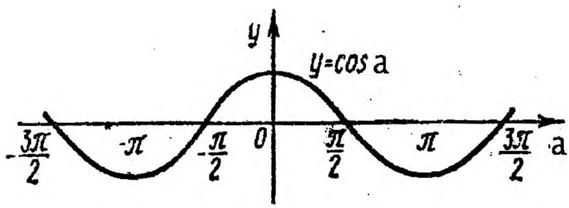


Рис. 47

Функция тангенс угла *α (tgα)*.

1) Область определения $D(tg\alpha) \in R$, кроме чисел вида $\frac{\pi}{2} + \pi n, k \in Z$. Это вытекает из того, что в точках, соответствующих указанным числам, косинус равен нулю и, следовательно, функция тангенс не существует;
2) Множество значений $E(tg\alpha) \in \left]-\infty;+\infty\right[$.
3) Функция нечётная, так как $tg(-\alpha) = -tg\alpha$.
4) Функция периодичная, период тангенса равен $T(tg\alpha) = \pi$, $tg(\alpha + \pi \cdot n) = tg\alpha$.
5) Монотонность:
   Функция $tg\alpha$ монотонно возрастает в каждом промежутке $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right[$, $k \in Z$

6) График функции ***tgα*** показан на рисунке 48.

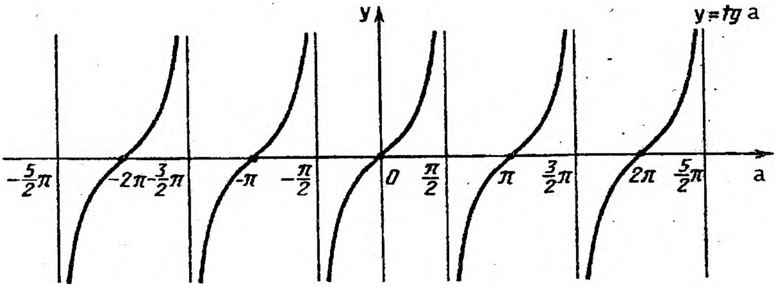


Рис. 48

Функция котангенс угла *α (ctgα).*

1) Область определения $D(ctg\alpha) \in R$, кроме чисел вида πn, где $n \in Z$. Это следует из того, что в этих точках $\sin\alpha = 0$ и, следовательно, котангенс не существует.
2) Множество значений $E(ctg\alpha) \in]-\infty;+\infty[$.
3) Функция нечётная, так как $ctg(-\alpha) = -ctg\alpha$.
4) Функция периодичная, период котангенса равен $T(ctg\alpha) = \pi$, $ctg(\alpha \pm \pi n) = ctg\alpha$.
5) Монотонность:
   Функция $ctg\alpha$ убывает в каждом промежутке $\alpha \in]\pi k, \pi + \pi k[$, $k \in Z$.
6) График функции ***ctgα*** представлен на рисунке 49.

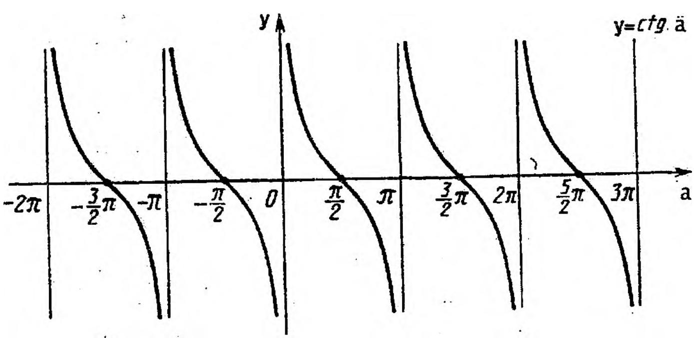


Рис. 49

2. Тригонометрические функции двойного и половинного аргумента, преобразования тригонометрических функций.

Тригонометрические функции двойного аргумента.

Из формул синуса и косинуса суммы (тема 12, п. 3) можно получить формулы синуса и косинуса двойного аргумента, если в данных соотношениях:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha,$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\alpha,$$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$$

положить $\alpha=\beta$, то получим следующие тождества для функции двойного аргумента (угла):

1) синус двойного угла $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

2) косинус двойного угла $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

3) тангенс двойного угла $tg2\alpha=\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

Следствия (или дополнительные формулы): выразив правую часть формулы 2) через одну тригонометрическую функцию (синус или косинус), приходим к соотношениям:

4) $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$, $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$.

Из формул 4) можно выразить $\sin^2\alpha$ и $\cos^2\alpha$ через $\cos 2\alpha$:

$$\sin^2\alpha=(1-\cos 2\alpha)/2, \qquad \cos^2\alpha=(1+\cos 2\alpha)/2.$$

Тригонометрические функции половинного аргумента.

Если в формулах $\begin{matrix}\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha\\ \cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1\end{matrix}$ положить $\alpha=x/2$, то получим:

$$\cos x=1-2\sin^2(x/2), \cos x=2\cos^2(x/2)-1.$$

Отсюда следуют следующие соотношения для функции половинного аргумента (угла):

1) Синус половинного угла $\sin\dfrac{x}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$

2) Косинус половинного угла $\cos\dfrac{x}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$

3) Тангенс половинного угла $tg\dfrac{x}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

$$tg\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}.$$

Знак перед радикалом (корнем) зависит от того, в какой координатной четверти находится угол $x/2$.

Преобразование суммы и разности тригонометрических функций в произведение.

Выведем формулу, позволяющую преобразовать сумму $\sin\alpha + \sin\beta$ в произведение тригонометрических функций. Положим $\alpha = x + y, \beta = x - y$ и применим уже известные формулы для суммы и разности двух аргументов, тогда:
$\sin\alpha + \sin\beta = \sin(x + y) + \sin(x - y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y + \sin x\cos y - \cos x\sin y =$
$= 2\sin x\cos y$. Решив теперь систему уравнений $\begin{cases}\alpha = x + y\\ \beta = x - y\end{cases}$ относительно x и y, получим:

$$\begin{cases}x = (\alpha + \beta)/2\\ y = (\alpha - \beta)/2\end{cases}.$$

Подставив вместо x и y их соответствующие выражения через α и β, получим:

$$1)\ \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Аналогичным способом выводятся следующие формулы, преобразующие сумму или разность тригонометрических функций в произведение:

$$2)\ \sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$3)\ \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$4)\ \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму.

Формулы для преобразования произведения синуса и косинуса в сумму получаются из формул сложения для синуса и косинуса. Запишем формулы синуса суммы и синуса разности аргументов x и y:

$$\sin(x + y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y.$$

Сложив почленно эти равенства и разделив результат на 2, получим:

$$1)\ \sin x\cos y = \frac{\sin(x + y) + \sin(x - y)}{2}.$$

Аналогичным образом получим формулы:

$$2)\ \cos x\cos y = \frac{\cos(x + y) + \cos(x - y)}{2}, \qquad 3)\ \sin x\sin y = \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2}.$$

3. Теорема косинусов и теорема синусов.

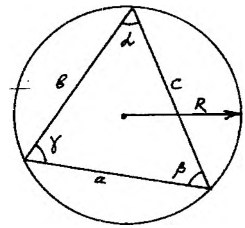


Рис. 50

1. ***Теорема синусов:*** в любом треугольнике отношение стороны к синусу противолежащего угла есть величина постоянная, равная диаметру описанной окружности (рис. 50):

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=R.$$

2. ***Теорема косинусов:*** квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними (рис. 51):

$$a^2=b^2+c^2-2b\cdot c\cos\alpha\ .$$

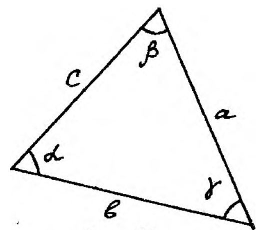


Рис. 51

Рассмотрим пример решения задачи, в которой используются данные теоремы. Пусть у треугольника заданы две стороны и угол α, противолежащий стороне a:

$a=34$, $b=12$, $\alpha=164^\circ$ (см. рис. 51).

Требуется найти остальные углы и сторону треугольника: $\gamma,\beta,c-?$

Решение:

1) По теореме синусов имеем: $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$. Известны стороны a,b и угол α, следовательно, можем найти $\sin\beta$:

$$\sin\beta=\frac{b\sin\alpha}{a}=\frac{12}{34}\cdot\sin 164^\circ=\frac{12}{34}\sin(180^\circ-16^\circ)=\frac{12}{3}\sin 16^\circ=\frac{12}{34}\cdot 0{,}275=0{,}097\ .$$

Значит, мы можем найти угол $\beta=\arcsin 0{,}097\approx 5^\circ$.

2) Теперь мы знаем два угла α и β, следовательно, можем вычислить третий угол γ: $\gamma=180^\circ-\alpha-\beta$ (т.к. сумма всех углов в треугольнике равна 180^o), $\gamma=180-164^\circ-5^\circ=11^\circ$.

3) Используя теорему синусов, найдем последнюю неизвестную величину – сторону треугольника c: так как $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma}$, то:

$$c=\frac{a\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha}=\frac{34\cdot\sin 11^\circ}{\sin 164^\circ}=\frac{34\cdot 0{,}19}{0{,}275}=23{,}5\ .$$

Все неизвестные величины найдены: $\gamma=11^0$; $\beta=5^0$; c=23,5. Теперь можно проверить правильность полученных данных. Получившийся треугольник имеет следующие данные:

$a = 34 \quad \alpha = 164^\circ$

$b = 12 \quad \beta = 5^\circ$.

$c = 23{,}5 \quad \gamma = 11^\circ$

Бо́льшему углу соответствует бо́льшая сторона, и сумма углов в треугольнике равна 180^0. Следовательно, задача решена правильно.

Задания для решения:

Используя формулы для двойного аргумента, вычислить:

134. $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha = -0{,}8$ и $180^\circ < \alpha < 270^\circ$.

135. $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = -0{,}8$ и $180^\circ < \alpha < 270^\circ$.

136. $tg 2\alpha$, если $tg\alpha = -0{,}5$ и $180^\circ < \alpha < 270^\circ$.

Упростить выражение:

137. $1 - 2\sin^2\alpha + \cos 2\alpha$.

Используя формулы для половинного аргумента, вычислить:

138. $tg\dfrac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = 0{,}6$ и $180^\circ < \alpha < 360^\circ$.

139. $\dfrac{\sin\alpha}{2 - 3\cos\alpha}$, если $tg\dfrac{\alpha}{2} = 0{,}5$.

140. $\sin\dfrac{\alpha}{2}, \cos\dfrac{\alpha}{2}, tg\dfrac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}, 90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

141. Найти $A = \sin 4\alpha - \cos 4\alpha$, если $tg\alpha/2 = 1/2$.

Преобразовать в произведение:

142. $1 + \sin\alpha + \cos\alpha$

143. $\sqrt{3} - 2\sin\alpha$

144. $\dfrac{\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha}{\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha}$

145. Упростить:

$$\frac{\sin\alpha + 2\sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\sin 3\alpha + 2\sin 5\alpha + \sin 7\alpha}$$

Решить задачи, используя теоремы синусов и косинусов:

146. Даны две стороны треугольника: a=32, c=23 и угол β=152^0. Найти остальные углы и сторону треугольника: b, α, γ – ?

147. Даны два угла треугольника: α=36^0, β=25^0 и сторона b=12. Найти остальные две стороны и угол треугольника: γ, a, c – ?

148. Найти все элементы прямоугольного треугольника, если

$a = 12\dfrac{2}{3}, b = 3\dfrac{1}{6}, \gamma = 90^\circ$

Тема №12.

1. **Числовая последовательность.**
2. **Предел последовательности.**
3. **Теоремы о пределах последовательности.**

1. Числовая последовательность.

Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое число x_n, то говорят, что определена ***числовая последовательность*** $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \ldots$ Кратко ее обозначают символом $\{x_n\}$, (x_n), либо x_n, $n \in N$. Число x_n называют членом (элементом) последовательности, а n – номером члена. Последовательности $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$, $\{x_n / y_n\}$ называются соответственно суммой, разностью, произведением и частным двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ (для частного $y_n \neq 0$). Существует два основных способа задания числовых последовательностей:

1) с помощью формулы n-го члена, т. е. последовательность считается заданной, если известна (задана) формула для n-го члена. Например, числовая последовательность задана в виде формулы для n-го члена:

$$x_n = \frac{1}{2n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \quad x_n = 1, 1/3, 1/5, \ldots 1/(2n-1)$$

2) Рекуррентный способ: при этом задают κ первых членов последовательности и формулу, выражающую (при всех $n \geq 1$) a_{n+k} член через κ предыдущих членов (чаще всего $\kappa = 1$ или $\kappa = 2$). Например, формулы $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, и $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ при $n \geq 1$ задают бесконечную числовую последовательность: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 3$, $a_5 = 5$, $a_6 = 8$, $a_7 = 13, \ldots$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***ограниченной***, если для любого n существуют два числа m и M такие, что $m \leq x_n \leq M$. С геометрической точки зрения это означает, что все члены последовательности находятся в интервале от m до M. *Краткая запись определения*: последовательность $\{x_n\}$ называется ***ограниченной***, если $\exists$ m и $M > 0$ такие, что $\forall n : m \leq x_n \leq M$ (смотри пункт «краткие обозначения»). Например, последовательность $x_n = 0, 1/2, 1/3, 1/5, \ldots 1/n, \ldots$ ограничена, т. к. все ее члены находятся в интервале $0 < x_n \leq 1$, т. е. $m = 0$, $M = 1$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***неограниченной***, если для любого n существует число M такое, что $|x_n| \leq M$. Последовательность $\{x_n\}$ называется ***неограниченной***, если $\exists$ $M > 0$ такое, что $\forall n : |x_n| > M$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***возрастающей***, если каждый её член, начиная со второго, больше предыдущего, $x_{n+1} > x_n$. Например, последовательность $\{x_n\}$ $=0,\ 1/2,\ 2/3,\ldots,(n-1)/n,\ldots$ – возрастающая, т. к. $x_{n+1}-x_n=\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n(n+1)}>0$, значит $x_{n+1}>x_n$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***убывающей***, если каждый её член, начиная со второго, меньше предыдущего, $x_{n+1}<x_n$. Например, последовательность $\{x_n\}=0,\ 1/2,\ 1/3,\ldots,\ 1/n,\ldots$ – убывающая, т.к. $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=-\frac{1}{n(n+1)}<0$, значит $x_{n+1}<x_n$.

2. Предел последовательности.

Число a называется ***пределом числовой последовательности*** $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдётся такое натуральное число N, что для всех членов последовательности номерами $n>N$ (т. е. начиная с некоторого номера) выполняется неравенство $|x_n-a|<\varepsilon$. Краткая запись определения: число a называется ***пределом числовой последовательности*** $\{x_n\}$, если $\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbf{N}$, такое, что $\forall\, n>N$: $|x_n-a|<\varepsilon$ (см. пункт «краткие обозначения»). Обозначают данное число (предел последовательности) с помощью следующей записи:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a$$

Например, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=0$, т. к. $\{x_n\}=1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{7},\ldots\to 0$.

О последовательности, имеющей пределом конечное число a, говорят, что она сходится к a. Последовательность, имеющая предел, называется ***сходящейся***. Если же последовательность не имеет предела, то она называется ***расходящейся***.

Примечание. Изобразим члены последовательности (x_n) точками на числовой прямой. Пусть n-й член последовательности удовлетворяет неравенству $|x_n-a|<\varepsilon$, или, что то же самое, двойному неравенству $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$ (рис. 52).

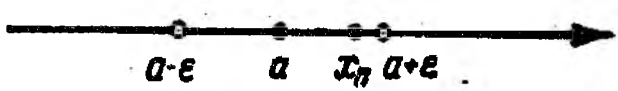


Рис. 52

Тогда все члены последовательности с номерами $n>N$ (т.е. x_{N+1}, $x_{N+2},\ldots$) попадут в интервал $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$, который называется ε - окрестностью точки $\boldsymbol{a}$. Следовательно, с геометрической точки зрения понятие предела имеет следующий смысл: если число $\boldsymbol{a}$ есть предел последовательности $\{x_n\}$, то в произвольную ε-окрестность точки а попадут все члены данной последовательности, за исключением конечного их числа. Еще раз рассмотрим определение предела числовой последовательности на конкретном примере.

Пример: показать, что число 2 является пределом последовательности $x_n=\dfrac{6n-1}{3n}$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n-1}{3n}=2$.

Решение:

Пусть ε – любое наперед заданное положительное число. Тогда, согласно вышеуказанному определению предела числовой последовательности:

$$\left|\frac{6n-1}{3n}-2\right|<\varepsilon.$$

Решим это неравенство относительно n, т. е. найдем такой номер члена последовательности, который удовлетворяет определению предела:

$$\left|\frac{6n-1-6n}{3n}\right|<\varepsilon, \Rightarrow \frac{1}{3n}<\varepsilon \Rightarrow n>\frac{1}{3\varepsilon}.$$

Если в качестве N взять любое натуральное число, большее $\dfrac{1}{3\varepsilon}$, то для всех $n>N$ для любого $\varepsilon>0$ будет выполнено неравенство $\left|\dfrac{6n-1}{3n}-2\right|<\varepsilon$ и тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n-1}{3n}=2$. Пусть, например $\varepsilon=0{,}01$ (можно выбрать любое число). Тогда ε-окрестность числа 2 (предполагаемого предела) выглядит так: $2-\varepsilon<2<2+3$, $1{,}99<2<2{,}01$ (рис.53). А номер члена последовательности, начиная с которого все члены данной последовательности будут попадать в выбранную ε-окрестность числа 2 будет равен: $N=\dfrac{1}{3\varepsilon}=\dfrac{1}{0{,}01\cdot 3}=\dfrac{1}{0{,}03}=\dfrac{100}{3}=33{,}3$. Проверим, действительно ли все члены последовательности $\{x_n\}=\dfrac{6n-1}{3n}$ попадают в указанную ε-окрестность. Возьмём любой член последовательности $\{x_n\}$ с номером больше, чем $33{,}3$. Например, с номером $n=34$. Тогда 34-й член данной последовательности будет равен: $x_{34} = \dfrac{6\cdot 34 - 1}{3\cdot 34} = \dfrac{203}{102} = 1{,}9902$. Он действительно попадает в ε-окрестность числа 2 (рис. 53).

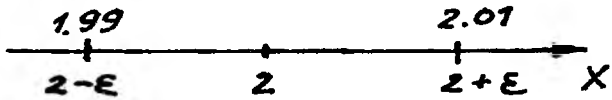


Рис. 53

Найдем величину $|x_{34} - 2| = |1{,}9902 - 2| = |-0{,}0002| < 0{,}01 = \varepsilon$, т.е. $|x_{34} - 2| < \varepsilon = 0{,}01$. Значит число 2 действительно является пределом данной числовой последовательности $\{x_n\} = \dfrac{6n-1}{3n}$, так как полностью удовлетворяет определению предела числовой последовательности и все члены этой последовательности, начиная с 34-го, находятся в ε-окрестности числа 2, т.е. в интервале $]1{,}99; 2{,}01[$.

Необходимое условие существования предела последовательности.

Если последовательность сходится (т.е. имеет предел), то такая последовательность является ограниченной. Отсюда следует, что если последовательность не является ограниченной, то она не имеет предела. Например, последовательность $\{y_n\}=(n+1)/3$ не ограничена, т.к. всегда можно найти такое $n \in N$, что $\{y_n\} > M$, где M – любое число. Значит, эта последовательность предела не имеет.

Достаточное условие существования предела. (Теорема Вейерштрасса, упрощенная формулировка). Если последовательность монотонна и ограничена, то она имеет предел.

Например, последовательность $(x_n) = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots$ является монотонно убывающей и ограниченной, т. к. для нее выполняются следующие условия: $0 < x_n \le 1$, $x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} = -\dfrac{1}{n(n+1)} < 0 \Rightarrow x_{n+1} < x_n$, следовательно, эта последовательность имеет предел.

Единственность предела. Если последовательность сходится (т. е. имеет предел), то этот предел единственный.

3. Теоремы о пределах последовательности.

Теорема №1. Если последовательности (x_n) и (y_n) сходятся, то:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n .$$

Теорема №2. Если последовательности (x_n) и (y_n) сходятся, то:

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n .$$

Теорема №3: Постоянный множитель можно вынести за знак предела.

$$\lim_{n\to\infty} cx_n = c\lim_{n\to\infty} x_n ,\ c \in R .$$

Теорема №4: Если последовательности (x_n) и (y_n) сходятся и предел последовательности (y_n) отличен от нуля, то:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} .$$

Примечание. Последовательность (x_n) называется ***бесконечно малой,*** если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Например, последовательности $\{x_n\} = a/n$ и $\{x_n\} = q^n$ при $|q|<1$ – бесконечно малые, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{n} = 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0,\ где\ |q| < 1$.

Задания для решения:

Найти предел последовательности:

149. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{3n-5}$

150. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n-1}{2n^2+3}$

151. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n+3}{1-4n}$

152. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+3n-4n^2}{1-2n+5n^2}$

153.* Доказать, что последовательность (a_n), где $a_1=3$, $a_{n+1} = \frac{2+a_n^2}{2a_n}$, является убывающей.

Тема № 13.

1. Предел функции.
2. Теоремы о пределах функции.
3. Непрерывность функции.

С помощью теории пределов можно определить характер поведения не только числовых последовательностей, но и таких переменных величин, как функции.

1. Предел функции.

Число b называется **пределом функции** $y=f(x)$ **при** $x \to a$, если для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое $\delta>0$, что при всех $x \neq a$, удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta$, справедливо неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$. При этом употребляют запись:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

Из определения предела функции следует, что функция должна быть определена на промежутке $]a-\delta\ ,\ a+\delta[$, кроме, возможно, самой точки a (рис. 54).

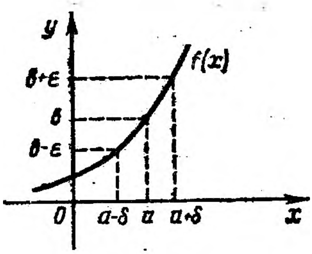


Рис. 54

На рис. 55 приведен пример, где функция $y=f(x)$ в точке $x=a$ имеет предел, равный b, хотя значение функции $f(a)=M_0 \neq b$.

Геометрически существование предела $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ означает, что, каково бы ни было $\varepsilon>0$, всегда найдется такое число δ, что для всех x, заключенных между $a-\delta$ и $a+\delta$ (кроме, быть может, самой точки a), график функции $y=f(x)$ лежит в полосе, ограниченной прямыми $y=b+\varepsilon$ и $y=b-\varepsilon$.

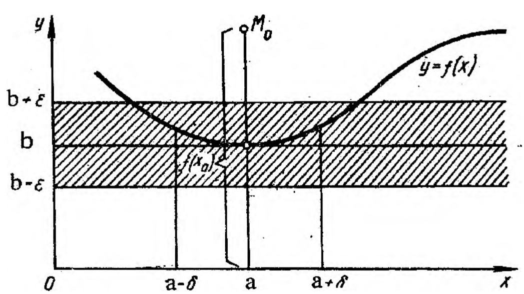


Рис. 55

1. Теоремы о пределах функции.

Теорема 1. Предел алгебраической суммы конечного числа функций равен сумме их пределов при условии, что эти пределы существуют:

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to a}(f(x))+\lim_{x\to a}(g(x)).$$

Теорема 2. Предел произведения двух функций равен произведения пределов, если последние существуют:

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x))=\lim_{x\to a}(f(x))\lim_{x\to a}(g(x)).$$

Следствие 1) из теоремы 2. Постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$\lim\limits_{x\to a}kf(x)=\lim\limits_{x\to a}k\lim\limits_{x\to a}f(x)$, где k – постоянный множитель.

Следствие 2) из теоремы 2. Если функция имеет предел при $x\to a$, то:

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n=\left[\lim_{x\to a}f(x)\right]^n.$$

Теорема 3. Предел отношения двух функций равен отношению их пределов, если последние существуют и предел делителя отличен от нуля:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)},\ \text{где}\ \lim_{x\to a}g(x)\neq 0.$$

Теорема 4. Предел постоянной равен самой постоянной:

$$\lim_{x\to a}C=C.$$

Примечание: доказательства теорем в данном пособии не приводятся.

Некоторые дополнительные свойства пределов функций.

Если некоторые переменные величины имеют конечные пределы при $x\to a$, то:

1. $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a}f(x)}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{c}{x}=0$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{c}{x^k}=0,\ k=1,2,3,\ldots$

Некоторые часто используемые пределы:

1. Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

2. Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e \qquad \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$$

3. Непрерывность функции.

Для дальнейшего изучения функций очень важно ознакомиться с таким понятием, как непрерывность функции. Данному вопросу посвящен целый раздел математического анализа, но мы приведем только самые основные определения, которые пригодятся для дальнейших вычислений.

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке x_0***, если она определена в некоторой окрестности этой точки и если предел функции при $x \to x_0$ равен значению функции в этой точке, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функция $f(x)$, непрерывная в каждой точке заданного промежутка, называется ***непрерывной на всём промежутке***. Например, функция $y=x^2$ непрерывна в любой точке числовой прямой, т. к. $\lim\limits_{x \to x_0} x^2 = x_0^2$, а функция $y=\sqrt{x}$ непрерывна в любой точке $x \geq 0$, т. к. $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$.

Если функция в какой либо точке x_0 не определена или её предел в точке x_0 не равен значению функции в этой точке, то говорят, что функция терпит ***разрыв*** в точке x_0, а точку x_0 называют ***точкой разрыва***. Например, функция $y=a/x$ непрерывна в любой точке $x \neq 0$, а в точке $x=0$ терпит разрыв, т. к. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{a}{0}$, а такого предела не существует.

Задания для решения:

Найти пределы функции:

154. $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x+3}{\sqrt{x+4}-1}$

155. $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^4+2}{3x^3-1}$

156. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{3x^2-x-2}{4x^2-5x+1}$

157. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3+1}{x+1}$

158. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{7x^2+6x-3}{9x^3+8x^2-2}$

159. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{6x^2+5x+4}{3x^2+7x-2}$

160. $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sin(\pi - x)}{\pi - x}$

161. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{5x}{\sin 4x}$

162. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1+\frac{k}{x}\right)^x$

163. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

Тема № 14.

1. **Производная функции, общие правила нахождения производной.**
2. **Производные элементарных функций.**
3. **Производные суммы, произведения и частного.**
4. **Геометрический и физический смысл производной.**

1. Производная функции, общие правила нахождения производной.

Прежде всего, рассмотрим такие понятия, как ***приращение аргумента*** и ***приращение функции***. Пусть x и x_0 – значение независимой переменной из области определения функции $f(x)$. Тогда $x\text{-}x_0=\Delta x$ называется ***приращением независимой переменной (или приращением аргумента)***, следовательно, $x=x_0+\Delta x$. Вследствие этого значение функции изменится на величину $f(x)\text{-}f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. Разность между новым значением функции $f(x_0+\Delta x)$ и первоначальным ее значением $f(x_0)$ называется ***приращением функции*** $f(x)$ в точке x_0: $\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ (рис. 56).

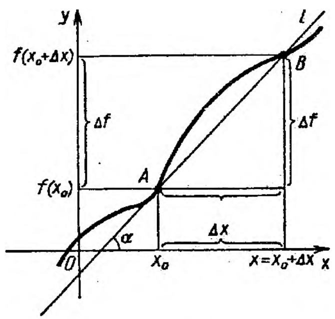


Рис. 56

Например: для функции $y=x^2$ найти приращение функции Δy, если $x=2{,}5$; $x_0=2$.

Решение:

$\Delta x=x\text{-}x_0=2{,}5\text{-}2=0{,}5$; $\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0\text{-}\Delta x)-f(x_0)=f(2{,}5)-f(2)=6{,}25\text{-}4=2{,}25$.

Функция называется ***возрастающей***, если $\Delta f(x_0)>0$ при любых $\Delta x>0$. Функция называется ***убывающей***, если $\Delta f(x_0)<0$ при любых $\Delta x>0$.

Производной функции в точке x_0 называется предел отношения приращения функции в точке x_0 к приращению аргумента (Δx), когда последнее стремится к нулю: $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ (читается «эф штрих» от x_0). Нахождение производной $f'(x)$ от данной функции $f(x)$ называют ***дифференцированием*** данной функции.

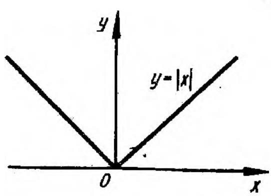


Рис. 57

Примечание. Из определения производной следует, что функция может иметь производную в точке x_0 только в том случае, если она определена в некоторой окрестности точки x_0, включая эту точку. Это утверждение сформулировано в следующей теореме:

Теорема. Если функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x, то она непрерывна в этой точке.

Обратное утверждение не верно. Непрерывная функция может не иметь производной. Например, функция $f(x)=|x|$ непрерывна на промежутке $]-\infty; \infty[$, но в точке $x=0$ производной не имеет, т. к. в точке $x=0$ не существует касательной, т. е. не существует предела $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ данной функции при $\Delta x\to 0$ (рис. 57).

Следствие: Если функция разрывна в некоторой точке, то она не имеет производной в этой точке.

Общие правила нахождения производной.

Пользуясь определением производной функции можно находить производные любых функций. Для этого нужно придерживаться следующей ***схемы нахождения производной***:

1) выбрав некоторое значение x, дают ему приращение Δx и находят значение функции в точке $x+\Delta x$, равное $f(x+\Delta x)$ (рис. 56, 58).
2) Находят приращение функции, вычитая из последующего значения $f(x+\Delta x)$ её первоначальное значение $f(x)$:
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x) \quad \text{(рис. 56, 58).}$$
3) Делят приращение функции Δy на приращение аргумента Δx:
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
4) Находят предел этого отношения:
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Найденный предел и есть производная от функции $y=f(x)$.

Рассмотрим данную схему нахождения производной функции на следующем примере: пусть дана функция $y=\sqrt{x}$ (или $f(x)=\sqrt{x}$). Требуется найти производную этой функции в точке $x=4$.

Решение:

1) $y+\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}$ – последующее значение (или $f(x+\Delta x)$), $y=\sqrt{x}$ – первоначальное (или $f(x)$).
2) $\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$ (или $f(x+\Delta x)-f(x)=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$) это приращение функции, Δx – приращение аргумента.
3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$;

4)

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sqrt{x+\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+0} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

5) $y'_{x=4} = \frac{1}{2x}\Big/_{x=4} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{4}$.

2. Производные элементарных функций.

Из предыдущего материала видно, что нахождение производной функции с использованием определения производной весьма трудоемкий процесс, и для функции любого вида данная процедура проделывается аналогично приведённому выше примеру (для функции $y = \sqrt{x}$). Подобным способом были найдены производные всех элементарных функций. Мы опускаем этап нахождения производной как предела отношения приращения функции к приращению аргумента и приводим только результат – таблицу производных элементарных функций.

Таблица производных элементарных функций.

1. $(x^k)' = kx^{k-1}$, где $k \in Q$, $x>0$, *в частности* $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

2. $(\sin x)' = \cos x$

3. $(\cos x)' = -\sin x$

4. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in z$

5. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $x \neq \pi n,\ n \in z$

6. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$

7. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

8. $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$ *в частности* $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

9. $(a^x)' = a^x \ln a$ *в частности* $(e^x)' = e^x$

10. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(-1 < x < 1)$

11. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(-1 < x < 1)$

12. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3. Производные суммы, произведения и частного.

1) ***Производная суммы***. Пусть *u* и *v* – две дифференцируемые функции, определённые на одном и том же промежутке. Тогда производная алгебраической суммы этих функций равна алгебраической сумме производных этих функций: $(u(x)+v(x))'=u'(x)+v'(x)$. Методом математической индукции доказывается, что эта формула справедлива для любого конечного числа слагаемых:

$$(u_1+u_2+\ldots+u_k)'=u'_1+u'_2+\ldots+u'_k.$$

2) ***Производная постоянной*** величины равна нулю:

$$(c)'=0,\text{ где } c=const.$$

Например, найдем $f'(x)$, если $f(x)=x+3$.

Решение: $f'(x)=(x+3)'=(x)'+(3)'=1+0=1$.

3) ***Производная произведения*** двух дифференцируемых функций *u* и *v* равна сумме произведений второй функции на производную первой и первой функции на производную второй:

$$(uv)'=u'v+uv'$$

Например, найдем производную функции $f(x)=x^2(x+1)$.

Решение:

$(x^2(x+1))'=(x^2)'(x+1)+x^2(x+1)'=2x(x+1)+x^2\cdot 1=2x^2+2x+x^2=3x^2+2x.$

эту же производную можно найти другим способом: $(x^2(x+1))'=(x^3+x^2)'=3x^2+2x.$

4) ***Производная частного***. Если функции *u* и *v* имеют в точке x производные и если $v(x)\neq 0$, то в этой точке существует производная их частного u/v, которая вычисляется по формуле:

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

Например, найдем $f'(x)$, если $f(x)=\dfrac{3+5x}{1-3x}$.

Решение:

$$\left(\frac{3+5x}{1-3x}\right)'=\frac{(3+5x)'(1-3x)-(3+5x)(1-3x)'}{(1-3x)^2}=\frac{(3'+(5x)')(1-3x)-(3+5x)(1'-(3x)')}{(1-3x)^2}=$$

$$\frac{5(1-3x)-(3+5x)(-3)}{(1-3x)^2}=\frac{14}{(1+3x)^2}$$

4. Геометрический и физический смысл производной.

Геометрический смысл производной.

Пусть через точку M(x,y) кривой, представляющей собой график функций $y=f(x)$, непрерывной в некоторой окрестности этой точки проведена секущая MN, образующая с положительным направлением оси O_x угол β (рис. 58). Напишем определение производной и попробуем из рисунка и некоторых рассуждений понять её геометрический смысл:

$$f' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

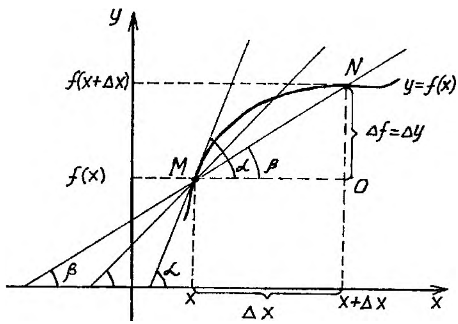


Рис.58

Из прямоугольного треугольника MNO, образованного секущей, Δx и Δf имеем: $\frac{\Delta f}{\Delta x} = tg\beta$ или угловой коэффициент секущей. При стремлении Δx к нулю получаем:

1) Точка N стремится к точке M ($N \to M$).
2) Секущая MN стремится к касательной в точке M.
3) Угол β стремится к углу α.

Следовательно, $tg\beta \to tg\alpha$ (тангенс угла наклона секущей стремится к тангенсу угла наклона касательной). Таким образом, получаем: $f' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\beta = tg\alpha = k$. Следовательно, ***геометрический смысл производной*** заключается в том, что ***производная функции в данной точке равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в данной точке, т. е. $f'(x_0)=tg\alpha$.***

Физический смысл производной.

Рассмотрим случай: материальная точка движется по координатной прямой, причём задан закон движения $S=S(t)$. За промежуток времени от t_0 до $t_0+\Delta t$ перемещение точки равно $S(t_0+\Delta t)-S(t_0)=\Delta S$, а её средняя скорость $v_{ср.}(\Delta t) = \frac{\Delta S}{\Delta t}$. С уменьшением промежутка времени Δt средняя скорость всё точнее характеризует скорость точки в данный момент времени t_0 (мгновенную скорость). Следовательно, при $\Delta t \to 0$ $v_{ср.}(\Delta t) = \frac{\Delta S}{\Delta t} \to v(t_0)$ т. е. средняя скорость будет стремиться к $v(t_0)$ (к мгновенной скорости):

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t} = S'(t_0) = v(t_0) = v_{мгн.}.$$

Таким образом, ***мгновенная скорость точки в данный момент времени равна значению производной от закона движения***. Это и есть ***физический смысл производной.***

С помощью производной выражается быстрота протекания физических, химических и других природных процессов.

Задания для решения.

Найти производные функций:

164. x^2

165. $2x^5$

166. $\left(\frac{1}{x^2}\right)$

167. $2\cos x$

168. 5^x

169. $x^2 - \frac{1}{x}$

170. $\frac{x^2}{x^3+1}$

171. $x^7 - 3x^2 - x + 5$

172. $\sin x + \cos x$

173. Найти скорость и ускорение точки, движение которой происходит по закону $x(t) = kx + b$

174. Найти скорость и ускорение точки, движущейся по квадратичному закону $x(t) = pt^2 + qt + r$

175. $\frac{x-1}{\sqrt{x}}$

176. $a^x arctg\, x$

177. $\frac{\ln x}{tg\, x}$

178. $-\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5}$

Тема№15.

1. **Производная сложной функции.**
2. **Производные высших порядков, их физический смысл.**

1. Производная сложной функции.

Функция $y=F(x)$, которая числу x ставит в соответствие число $f(g(x))$, называется функцией от функции или ***сложной функцией***, образованной из функций f и g в указанном порядке: $y=f(g(x))$, где $y=f(u)$, $u=g(x)$. Любую сложную функцию можно представить в виде элементарных (простых) функций, которые являются ее промежуточными аргументами. Приведем некоторые примеры простых и сложных функций:

Простые функции: x^2, $lg\, x$, $x-1$, $cosx$, $ctgx$...

Сложные функции: lnx^2, $(lgx)^2$, $cosx^5$, ctg^2x...

Сложную функцию lnx^2 можно представить, как функцию $ln(u)$, где $u=x^2$. Функция u является промежуточным аргументом. Правило дифференцирования сложной функции выражается следующей теоремой:

Теорема. Если функция $u=g(x)$ имеет производную $u'(x)=g'(x)$ в точке x, а функция $y=f(u)$ – производную $y'_u=f'(u)$ в соответствующей точке u, то сложная функция $y=f(g(x))$ в данной точке x имеет производную:

$$y'_x=f'(u)\cdot u'(x).$$

Примечание. Можно рассуждать по-другому: в формуле $y(x)=f(g(x))$ функция $g(x)$ ***– внутренняя функция или промежуточный аргумент, функция $f(g(x))$ – внешняя***. Сначала дифференцируем внешнюю функцию по промежуточному аргументу, а затем – промежуточный аргумент (внутреннюю функцию) по аргументу x, и находим их произведение. По-другому, данная теорема называется ***правилом «цепочки»***.

Например, найдем производную функции $y=(3-5x+x^2)^{100}$

Решение: Пусть $u=g(x)=3-5x+x^2$ – внутренняя функция или промежуточный аргумент, тогда функция $y=(3-5x+x^2)^{100}$ приобретает вид: $y=u^{100}$. Используя теорему о дифференцировании сложной функции, получаем:

$y'(x)=(u^{100})'_u\cdot u'_x(x)=100u^{99}\cdot u'_x(x)=100(3-5x+x^2)^{99}\cdot(3-5x+x^2)'_x=$

$=100(3-5x+x^2)^{99}\cdot(2x-5)$.

2. Производные высших порядков, их физический смысл.

Производной ***первого порядка*** называется первая производная функции $y'=f'(x)$. Производной ***второго порядка*** или второй производной функции называется производная от её производной. Она обозначается символами:

$$y''=(y')' \text{ или } f''(x)=(f'(x))'.$$

Вторая производная в свою очередь есть функция от x, и ее тоже можно продифференцировать. Производная от второй производной называется производной третьего порядка или третьей производной и обозначается $y'''(x)$. Производная (n–1)-й производной (n – натуральное число) называется производной n-ого порядка или n-ой производной и обозначается $y^{(n)}(x)$.

Мгновенная скорость $v(t)$ также как и закон движения, является функцией времени. Поэтому можно рассматривать вторую производную от закона движения как скорость изменения скорости, или вторую производную от функции закона движения: $v'(t)=S''(t)=a$. В физике данная величина называется ***ускорением*** и, также как и скорость, имеет важное значение для исследования различных биологических процессов.

Таким образом, ***физический (или механический) смысл второй производной*** заключается в следующем: если задан закон, которому подчиняется движение материальной точки, то ***вторая производная есть ускорение*** этого движения.

Задания для решения:

Найти производные сложных функций:

179. $\sqrt{3x^2+1}$

180. $tg2x$

181. $4ctg(x/2)$

182. $\cos 3t\cos 2t+\sin 3t\sin 2t$

183. $\sqrt{4-\sqrt{x}}$

184. $2x+3{,}6\sin^5(\pi-x)$

185. $\frac{3\cos(2x+1)}{\sin(2x+1)}-tg(1-4x)$

186. a^{x^2}

187. $\sin^2(\frac{x}{2})$

188. $\frac{1}{(1+\sin 2x)^3}$

189. $\frac{\sin^2 x}{\cos x}$

190. $\ln\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$

191. $x^2\ln x$

192. $\ln\frac{x-a}{x+a}$

193. $\ln\ln x$

194. $e^{\sin 2x}$

195. $\ln\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

196. $\ln\frac{ae^x}{bx^7+c}$

197. $\sqrt{1-x^2}\arccos x$

198. $arctg\frac{x}{a}+\frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)$

199. $arctg\sqrt{4x-1}$

200. $arcctg\frac{1}{x}$

201. $\arccos\sqrt{x}$

202. $\arccos x^3$

203. $arctg\frac{1}{\sqrt{x}}$

Найти производные второго порядка от функций:

204. $3\sin x$

205. $x\ln x$

206. $e^x+arctg\,x$

207. $(x^2-1)^2$

208. a^x

209. $(ax^2-b)^2$

210. $tg\,x$

211. $\ln x$

212. $ctg\,x$

213. $\sin 5x$

Тема № 16.

1. **Применение первой производной к исследованию функций: условие возрастания и убывания функции на интервале.**
2. **Экстремумы функции, максимумы и минимумы.**
3. **Применение второй производной к исследованию функций: выпуклость и вогнутость функции, точки перегиба.**
4. **Построение графиков функций.**

1. Применение первой производной к исследованию функций: условие возрастания и убывания функции на интервале.

Благодаря связи, которая существует между поведением функции и ее производной, можно провести исследование функции и построить ее график. Для этого нужно ввести понятие возрастающей и убывающей на интервале функции.

Функция называется ***возрастающей*** в некотором интервале, если для любых двух точек x_1 и x_2, принадлежащих этому интервалу, из неравенства $x_2>x_1$ следует неравенство $f(x_2)>f(x_1)$.

Функция называется ***убывающей*** в некотором интервале, если для любых двух точек x_1 и x_2, принадлежащих этому интервалу, из неравенства $x_2>x_1$ следует неравенство $f(x_2)<f(x_1)$.

Условие возрастания (убывания) функции.

Теорема. Если дифференцируемая функция $f(x)$ ***возрастает*** на интервале $]a,b[$, то в любой точке x этого интервала производная данной функции положительна $f'(x)\geq 0$. Если дифференцируемая функция $f(x)$ ***убывает*** на интервале $]a,b[$, то в любой точке x этого интервала производная данной функции отрицательна $f'(x)\leq 0$ (рис. 59). Если дифференцируемая функция $f(x)$ на интервале $]a,b[$ ***не изменяется*** (равна постоянной величине), то ее производная $f'(x)$ равна нулю.

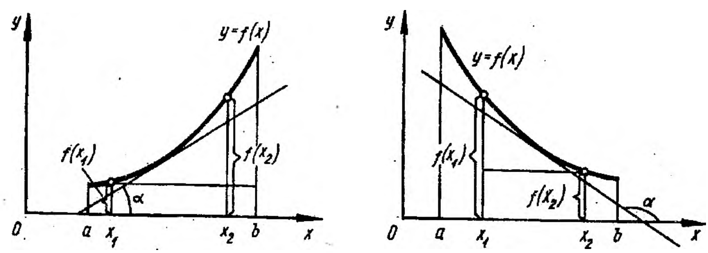


Рис. 59

2. Экстремумы функции, максимумы и минимумы.

Функции не всегда являются только убывающими или возрастающими. Часто функция меняет свое «направление» при переходе через какую-либо точку, как, например, на рисунке 60. В точках x=C, x=E данная функция меняет возрастание на убывание, а в точке x=D – убывание на возрастание. Такие точки называют ***точками экстремума*** функции.

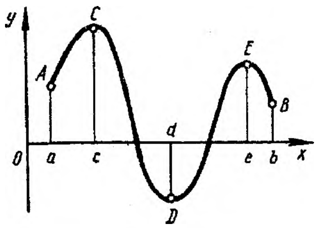


Рис. 60

Необходимое и достаточное условие существования экстремума.

Теорема. Если функция $f(x)$, дифференцируемая на интервале $]a,b[$, имеет в точке x_0 ***экстремум***, то ее производная в этой точке равна нулю:

$$f'(x) = 0.$$

Теорема. Если в точке $x=x_0$ производная функции $f(x)$ обращается в нуль и меняет знак при переходе через эту точку, то $f(x_0)$ – экстремум функции, причём:

1) функция имеет ***максимум*** в точке x_0, если знак производной меняется с плюса на минус (т. е. $x_0-\varepsilon<x<x_0, f'(x)>0$; $x_0<x<x_0+\varepsilon, f'(x)<0$).
2) функция имеет ***минимум*** в точке x_0, если знак производной меняется с минуса на плюс (т. е. $x_0-\varepsilon<x<x_0$, $f'(x)<0$; $x_0<x<x_0+\varepsilon, f'(x)>0$).
3) Если же при переходе через точку $x=x_0$ производная функции не меняет знака, то в этой точке функция $f(x)$ экстремума не имеет.

Максимумом функции $y=f(x)$ называется такое её значение $y_1=f(x_1)$, которое больше всех других её значений, принимаемых в точках x, достаточно близких к точке x_1 (x_3) и отличных от неё, т. е. $f(x_1)>f(x)$ (рис. 61.)

Минимумом функции $y=f(x)$ называется такое её значение $y_2=f(x_2)$, которое меньше всех других её значений, принимаемых в точках x, достаточно близких к точке x_2 (x_4) и отличных от неё, т. е. $f(x_2)<f(x)$ (рис. 61).

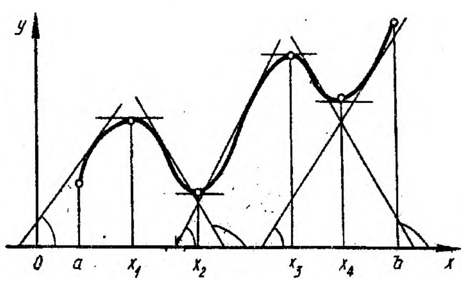


Рис. 61

Все точки внутри области определения, в которых производная функции равна нулю или не существует, называются ***критическими точками первого рода***.

Приведем пример исследования функции на возрастание и убывание. Найдем промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 4$. Первая производная данной функции имеет вид:

$$f'(x)=3x^2-3x-6=3(x^2-x-2).$$

а) Находим точки экстремума функции. Производная обращается в нуль, когда $x^2-x-2=0$, $x_1=-1$, $x_2=2$. Это критические точки. Следовательно, вся область определения функции делится на интервалы (рис. 62): $(-\infty; -1)$, $(-1; 2)$, $(2; +\infty)$.

б) Исследуем знак производной в каждом интервале:

Если $x<-1$, то $f'(x)=3(x^2-x-2)=3(x+1)(x-2)>0$, т. к. $(x+1)<0$ и $(x-2)<0$ для любого x из данного интервала (подставляем любое число из данного интервала). Следовательно, функция возрастает на промежутке $(-\infty;-1)$. Если $-1<x<2$, то $f'(x)=3(x^2-x-2)=3(x+1)(x-2)<0$, т. к. $(x+1)>0$ и $(x-2)<0$. Следовательно, функция убывает на промежутке $(-1; 2)$. Если $x>2$, то $f'(x)=3(x^2-x-2)=3(x+1)(x-2)>0$, т. к. $(x+1)>0$ и $(x-2)>0$. Следовательно, функция возрастает на промежутке $(2; \infty)$.

в) Исследуем критические точки с помощью первой производной.

При переходе через критическую точку $x=-1$ (слева направо) первая производная меняет знак с плюса на минус. Следовательно, при $x=-1$ функция имеет максимум $max\ f(x)=f(-1)=7{,}5$. При переходе через критическую точку $x=2$ первая производная меняет знак минус на плюс. Следовательно, в этой критической точке функция имеет минимум $min\ f(x)=f(2)=-6$. Общую картину можно представить в виде схемы на рисунке 62:

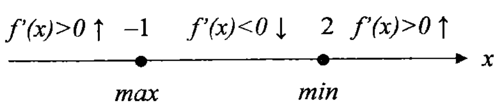


рис. 62

Примечание. Чтобы найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке, нужно вычислить значение функции во всех критических точках и на концах отрезка, а затем из полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее.

3. Применение второй производной к исследованию функций: выпуклость и вогнутость функции, точки перегиба.

Рассмотрим понятия выпуклости и вогнутости функции (кривой).
Кривая $y=f(x)$ называется выпуклой на интервале $]a,b[$, если она лежит ниже касательной, проведенной к этой кривой в любой точке $M\ (x,\ f(x))$ данного интервала (рис. 63).
Кривая $y=f(x)$ называется вогнутой на интервале $]a,b[$, если она лежит выше касательной, проведенной к этой кривой в любой точке $M\ (x,\ f(x))$ данного интервала (рис. 64).

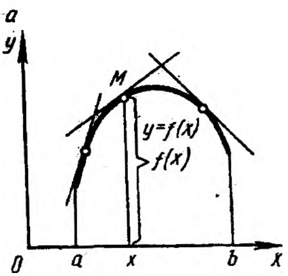


Рис. 63

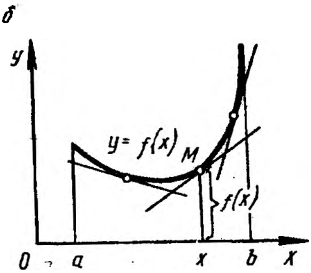


Рис. 64

Достаточное условие вогнутости (выпуклости) кривой.

Теорема. Если вторая производная функции $y=f(x)$ положительна внутри интервала $]a,b[$, то график функции ***вогнут*** на данном интервале $]a,b[$. Если вторая производная функции $y=f(x)$ отрицательна внутри интервала $]a,b[$, то функция ***выпукла*** на данном интервале $]a,b[$.

Точкой перегиба непрерывной кривой $y=f(x)$ называется точка, при переходе через которую кривая меняет свою выпуклость на вогнутость или наоборот.

Теорема. Если вторая производная $f''(x)$ в некоторой точке x_0 обращается в нуль и при переходе через нее меняет свой знак на обратный, то точка $M\ (x_0,\ f(x_0))$ является ***точкой перегиба*** графика функции (рис. 65).

Рис.65

Примечание. Вторая производная применяется также для определения максимума или минимума функции. Для этого существует следующее ***правило***: если в точке $x=x_0$ первая производная функции $y=f(x)$ равна нулю, а вторая производная отлична от нуля, то x_0 будет точкой экстремума, причём:

1) x_0 – точка ***максимума***, если $f''(x_0)<0$
2) x_0 – точка ***минимума***, если $f''(x_0)>0$.

Точки, в которых $f''(x_0)=0$ или не существует, называются ***критическими точками второго рода.***

4. Построение графиков функций.

Все предыдущие теоремы и рассуждения позволяют исследовать весь ход изменения функции и построить ее график, согласно приведенной ниже схеме исследования.

Общая схема исследования функции:

1. найти область определения функции;
2. проверить, является ли функция чётной или нечётной, периодической;
3. найти точки пересечения графика функции с осями ординат (если это возможно).
4. Найти производную функции и её критические точки первого рода (экстремумы, $f'(x)=0$).
5. Найти промежутки возрастания и убывания (монотонности) функции (знаки $f'(x)$ на промежутках). Если $f'(x)>0$, то функция возрастает на данном промежутке ↑. Если $f'(x)<0$, то функция убывает на данном промежутке ↓.
6. Провести исследование функции на максимумы и минимумы с помощью первой и второй производной (проверить, меняет ли знак первая производная при переходе через точку экстремума, и определить знак $f''(x)$ в критических точках первого рода).
7. Найти точки перегиба функции (критические точки второго рода, $f''(x)=0$), выпуклость и вогнутость функции (анализируем знак второй производной в критических точках первого рода);
8. Найти значения функции во всех критических точках и построить график функции с учётом вычисленных точек.

Иногда для уточнения построения графика следует найти две-три дополнительных точки и не обязательно строго придерживаться данной схемы исследования, если это приведет к построению графика быстрее и качественнее. Приведем пример исследования функции с помощью производных и построения графика. Исследуем функцию $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2$ и построим ее график.

Решение:

1. Область определения функции – вся числовая прямая **R**.
2. Функция не является ни чётной, ни нечетной, ни периодической.
3. Найдём точки пересечения с ось Ox (т. е. корни функции):

$$y=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2=0$$
$$3x^4-4x^3-12x^2=0$$
$$x^2(3x^2-4x-12)=0$$
$$x_{1,2}=0$$
$$x_3=-1{,}4$$
$$x_4\approx 2{,}8$$

4. Находим производную $f'(x)=x^3-x^2-2x=x(x^2-x-2)=(x+1)(x-2)x$

Приравняв производную к нулю, получим критические точки: $x=-1$, $x=0$, $x=2$. Найденные критические точки разбивают числовую прямую на четыре промежутка $]-\infty;-1[$, $]-1;0[$, $]0;2[$, $]2;+\infty[$.

Знаки производной $f'(x)$ в данных интервалах:

$]-\infty;-1[$: $f'(x)<0$, функция убывает ↓;

$]-1;0[$: $f'(x)>0$, функция возрастает ↑;

$]0;2[$: $f'(x)<0$, функция убывает ↓;

$]2;+\infty[$: $f'(x)>0$, функция возрастает ↑.

5. Найдём вторую производную функции: $f''(x)=3x^2-2x-2$. В критических точках первого рода –1, 0, 2 вторая производная имеет значения $f''(-1)=3>0, f''(0)=-2<0, f''(2)=6>0$.

6. Найдём точку перегиба $f''(x)=3x^2-2x-2=0$, тогда $x_1=1.22$, $x_2=-0.55$.

Значения функции в этих точках равны: $f(1.22)=-1.55, f(0.55)=-0.15$.

Составим таблицу:

x	$]-\infty;-1[$	-1	$]-1;0[$	0	$]2;+\infty[$	2	$]2;+\infty[$	-0.55	1.22	0, –1.4 2.8
$f'(x)$	–	*0*	+	*0*	–	*0*	+			
$f''(x_0)$		*>0 вогнутость*		*<0 выпуклость*		*>0 вогнутость*		*= 0, перегиб*	*= 0, перегиб*	
$f(x)$	*убывает* ↓	*– 5/12 min*	*возрастает* ↑	*0 max*	*убывает* ↓	*– 8/3 min*	*возрастает* ↑	*– 0.15*	*–1.52*	*0*

7) По полученным точкам строим график функции (рис. 66):

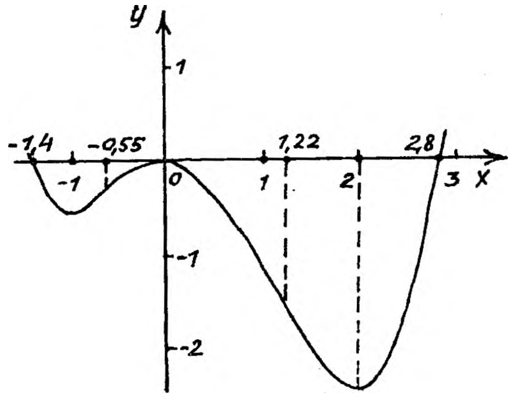


Рис. 66

Задания для решения:

Исследовать с помощью первой производной на максимум и минимум функцию:

214. $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 2\frac{2}{3}$

215. $(x-2)\sqrt[3]{x^2}$

216. $\frac{\ln x}{x}$

217. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y=x^3-1.5x^2-6x+1$ на отрезке [-2;0]

Исследовать функцию с помощью второй производной:

218. Найти интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба кривой Гаусса $y = e^{-x^2}$.

219. Найти точки перегиба графика функции $f(x)=x^3$.

220. Найти точки перегиба графика функции $y = \sqrt[3]{x-1}$.

Построить график функции:

221. $y = x^2 - 4x$

222. $y = x^3 - 3x^2 + 2$

223. $y = x^4 - 2x^2 - 8$

224. $y = x\sqrt{2-x^2}$

225. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$

226. $y = 4x^2 - x^4 - 3$

227. $y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 4$

228. $y = x^2 + 4x - 5$

Тема №17.

1. Дифференциал функции как главная часть приращения функции.

2. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.

1. Дифференциал функции как главная часть приращения функции.

С понятием производной тесно связано понятие дифференциала функции. Пусть непрерывная функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, тогда, согласно определению производной функции $f(x)$ в точке x_0, имеем:
$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Отсюда следует, что для всех достаточно малых Δx справедливо приближенное равенство $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}\approx f'(x_0)$. Следовательно, $\Delta f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x$. Выражение $f'(x_0)\Delta x$ называется ***главной частью приращения функции или дифференциалом функции*** и обозначается df:
$$df=f'(x_0)\Delta x\approx\Delta f(x_0).$$

Например, если рассматривать функцию $f(x)=x$, то на основании формулы для дифференциала имеем $df=dx=f'(x)\Delta x=x'\Delta x=\Delta x$, следовательно, $df=dx=\Delta x$. Таким образом, ***дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал аргумента:***
$$df=f'(x)dx.$$

Примечание. Короткая запись данных рассуждений имеет вид:
$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}\approx\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}\Rightarrow f'(x_0)\cdot\Delta x\approx\Delta f(x_0); f'(x_0)\Delta x=df\Rightarrow df\approx\Delta f(x_0)$$

Пользуясь определением дифференциала $df(x)=f'(x)dx$, получаем ***выражение производной функции через дифференциал*** (или другую запись определения производной функции):
$$f'(x)=\frac{dy}{dx}.$$

2. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.

Используя выражение $\Delta f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x$, можно получить основную формулу для простейших приближенных вычислений. Учитывая, что приращение функции имеет вид $\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, получаем:
$$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x\Rightarrow f(x_0+\Delta x)\approx f'(x_0)\Delta x+f(x_0).$$

Формула $f(x_0+\Delta x)\approx f'(x_0)\Delta x+f(x_0)$ применяется для приближенных вычислений значений функции в точке. Из нее следует, что приближенное значение функции в некоторой точке $x_0+\Delta x$ равно произведению производной функции в точке x_0 на приращение аргумента плюс значение функции в точке x_0.

Приведем пример приближенных вычислений значения функции с помощью данной формулы. Найдем приближенное значение кубического корня $\sqrt[3]{26{,}19}$.

Решение: полагая $x_0 = 27,\ \Delta x = 27 - 26{,}19 = -0{,}81$; $f(x) = \sqrt[3]{x},\ f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ и используя формулу для приближенных вычислений $f(x_0 + \Delta x) \approx f'(x_0)\Delta x + f(x_0)$, получим:

$$f(x_0) = \sqrt[3]{27},\ f'(x_0) = \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}},$$

$$f(x_0 + \Delta x) = \sqrt[3]{27 + (-0{,}81)} = \sqrt[3]{26{,}19} \approx -\frac{0{,}81}{3\sqrt[3]{27}} + \sqrt[3]{27} = -\frac{0{,}81}{3 \cdot 9} + 3 = 2{,}97$$

Примечание. Рассмотрим более подробно, что такое дифференциал функции, и какой аналитический и геометрический смысл он имеет. Пусть функция $f(x)$ имеет производную:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x).$$

Согласно теореме о связи бесконечно малой величины $\alpha(\Delta x)$ и предела функции (теорема не рассматривается), «снимая» знак предела в определении производной, получим:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x).$$

Преобразуем это выражение: $\Delta f = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$. Так как $\Delta x \to 0$, то приращение функции Δf состоит из слагаемых, каждое из которых есть бесконечно малая величина. Для того, чтобы определить, каким из этих слагаемых можно пренебречь, нужно определить порядок малости каждого из слагаемых по отношению к Δx. Это значит выяснить, какое из слагаемых быстрее стремится к нулю при $\Delta x \to 0$. Для этого разделим каждое из них на Δx и найдем предел каждого из слагаемых в отдельности:

1) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f'(x)\Delta x}{\Delta x} = f'(x) = const$.

Следовательно, слагаемое $f'(x)\Delta x$ и Δx имеют одинаковый порядок малости (например, как $\dfrac{x^2}{x^2}; \dfrac{x+1}{x}; \dfrac{5x}{10x}$).

2) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Здесь используем определение понятия бесконечно малой величины: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Сравнивая выражения 1) и 2), можно сделать вывод, что бесконечно малая $\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$ имеет более высокий порядок малости по отношению к бесконечно малой величине Δx. Это означает, что в выражении $\Delta f = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$ второе слагаемое быстрее стремиться к нулю при $\Delta x \to 0$, чем первое. Поэтому, первое слагаемое $f'(x)\Delta x$ называют ***дифференциалом функции в точке x или главной частью приращения функции в точке x. Это и есть аналитический смысл дифференциала:***

$$df = f'(x)\Delta x = f'(x)dx.$$

С геометрической точки зрения понять, что такое дифференциал, поможет рисунок 67.

Рассмотрим ещё раз определения производной, дифференциала и приращения функции. Итак,

$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = [NM']$;

$df(x_0) = f'(x_0)\cdot\Delta x$.

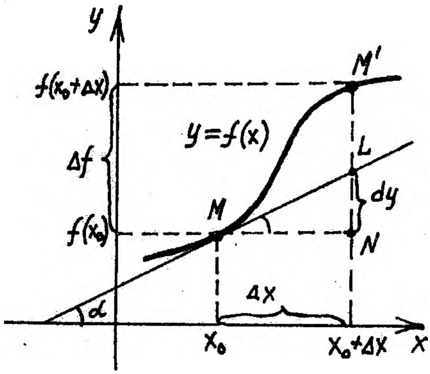


Рис. 67

Производная от функции в точке x_0: $f'(x_0) = tg\alpha$ – это тангенс угла наклона касательной к функции в точке x_0. Из прямоугольного треугольника MLN следует, что $df(x_0) = tg\alpha\cdot\Delta x = [LN]$ т. е. дифференциал функции $f(x)$ равен приращению LN ординаты касательной ML, проведённой к графику этой функции в точке M, когда аргумент получает приращение Δx.

Сравним эти два отрезка [NM′] и [LN]. Очевидно, что они не равны и отличаются друг от друга на величину $\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$: $\Delta f = df + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$. Пренебрегая бесконечно малой величиной $\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$, получим:

$$df \approx \Delta f \approx f'(x)\Delta x.$$

С помощью данной формулы дифференциал функции может быть использован для приближенного вычисления значения функции. Пусть нам известно значение функции $f(x)$ и её производная $y = f'(x)$ в точке x_0. Необходимо найти значение функции $f(x)$ в некоторой близкой точке $x_0 + \Delta x$. Для этого воспользуемся приближенным равенством $\Delta f \approx f'(x_0)\cdot\Delta x$ т. к. $\Delta f = (x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, то $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\cdot\Delta x$ отсюда:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f'(x_0)\Delta x + f(x_0).$$

Именно эту формулу используют для приближенного вычисления значении функции в близкой к x_0 точке $(x_0 + \Delta x)$.

Например, найдём приближенное значение функции $y = \sqrt[n]{x}$ в точке $x_0 + \Delta x$:

$$\sqrt[n]{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt[n]{x_0} + \frac{\sqrt[n]{x_0}}{nx_0}\Delta x, \text{ при } x_0 \neq 0, \text{ где } \frac{\sqrt[n]{x_0}}{nx_0} = f'(x_0).$$

Задания для решения:

Найти дифференциалы функций:

229. $y = x^3$

230. $y = \cos^2 x$

231. $y = \cos x + 3\sin x^2$

232. $y = arctg(1-x)^2$

233. $y = \ln\frac{1}{x^3}$

Найти приближенное значение:

234. $\sqrt[5]{33}$

235. $arctg1{,}02$

236. $\ln 1{,}01$

237. $\sin 31^0$

238. $(1{,}001)^{100}$

239. $\frac{1}{(0{,}997)^{30}}$

Тема № 18.

1. Первообразная функции и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Основные формулы интегрирования.

2. Простейшие способы интегрирования: непосредственное и интегрирование подстановкой.

1. Первообразная функции и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Основные формулы интегрирования.

Известно, что многие математические операции образуют пары взаимно обратных действий. Например, сложение и вычитание, умножение и деление, логарифмирование и потенцирование. Точно также и для операции дифференцирования существует обратная операция – интегрирование или нахождение функции *F(x)* по известной ее производной $f(x) = F'(x)$ или дифференциалу $f(x)dx$. Функцию ***F(x)*** называют ***первообразной*** на заданном промежутке для функции *f(x)*, если для всех

x из этого промежутка $F'(x)=f(x)$ или $dF(x)=f(x)dx$. Например, функция $F(x)=\frac{x^4}{4}$ есть первообразная для функции $f(x)=x^3$ на промежутке $]-\infty;\infty[$, т. к. $F'(x)=\left(\frac{x^4}{4}\right)'=\frac{1}{4}\cdot 4x=x^3=f(x)$ для всех $x\in]-\infty;\infty[$. Можно заметить, что функция $\left(\frac{x^4}{4}\right)+6$ имеет ту же самую производную x^3; поэтому $\left(\frac{x^4}{4}\right)+6$ также есть первообразная для $f(x)=x^3$ на всей области определения. Ясно, что вместо «6» можно поставить любую постоянную «С». Таким образом, задача нахождения первообразной неоднозначна. Она имеет бесконечное множество решений.

Совокупность первообразных ***F(x)+C*** для данной функции f(x)dx называют ***неопределённым интегралом от функции f(x)*** и обозначают $\int f(x)dx$:

$$\int f(x)dx=F(x)+C\,.$$

Основные свойства неопределённого интеграла:

1. Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции:
$$\left[\int f(x)dx\right]'=\left[F(x)+C\right]'=F'(x)=f(x)$$
2. Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению:
$$d\left[\int f(x)dx\right]=d\left[F(x)+C\right]=\left[F(x)+C\right]'dx=F'(x)dx=f(x)dx$$
3. Интеграл от дифференциала первообразной равен самой первообразной:
$$\int d\left[F(x)+C\right]=\int dF(x)=\int f(x)dx=F(x)+C$$
4. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределённого интеграла:
$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$$
5. Интеграл от алгебраической суммы равен алгебраической сумме интегралов слагаемых:
$$\int(f_1(x)+f_2(x)-f_3(x))dx=\int f_1dx+\int f_2dx-\int f_3dx$$
6. Дополнительное свойство: Если $F'(x)=0$ на некотором промежутке, то функция F – постоянна на этом промежутке.

Основные формулы интегрирования.

1. $\int dx = x + C$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
5. $\int e^x dx = e^x + C$
12. $\int \cos x dx = \sin x + C$
13. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
14. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$
15. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
16. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg\, x + C$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
8. $\int tg\, x dx = -\ln|\cos x| + C$
9. $\int ctg\, x dx = \ln|\sin x| + C$
10. $\int \operatorname{cosec} x dx = \ln\left|tg \frac{x}{2}\right| + C$
11. $\int \sec x dx = \ln\left|ctg \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right| + C$
12. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
17. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} + C$
18. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C$
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
20. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$
21. $\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

2. Простейшие способы интегрирования: непосредственное интегрирование и интегрирование подстановкой.

Непосредственное интегрирование.

Непосредственное интегрирование – это нахождение интегралов функции, основанное на прямом применении свойств неопределённых интегралов и таблицы основных формул интегрирования.
Например:

1) $\int (x-3)^2 dx = \int (x^2 - 6x + 9) dx = \int x^2 dx - 6\int x dx + 9\int dx = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x + C$;

2) $\int 2\cos x dx = 2\sin x + C$.

Интегрирование подстановкой (замена переменной).

Способ подстановки заключается в том, чтобы перейти от данной переменной интегрирования к другой переменной с целью упростить подынтегральное выражение и привести его к одному из табличных интегралов. Общих правил для выбора вида новой переменной не существует, задача решается в каждом конкретном случае индивидуально. Однако существует определённая последовательность действий для данного метода. Например, найдем следующий интеграл: $\int e^{2x+3}dx$. Порядок действий будет следующий:

1. Введём новую переменную t, связанную с x следующей зависимостью:
$$2x+3=t.$$
2. Возьмём дифференциал от левой и правой части этого равенства:
$$d(2x+3)=dt$$
$$(2x+3)'dx=dt$$
$$2dx=dt \Rightarrow dx=\frac{dt}{2}$$
3. Теперь вместо $2x+3$ и dx в подынтегральное выражение подставим их выражения через новую переменную t. Тогда получим:
$$\int e^{2x+3}dx=\frac{1}{2}\int e^{t}dt=\frac{1}{2}e^{t}+C.$$
4. Теперь нужно вернуться к прежней переменной x:
$$\frac{1}{2}e^{t}+C=\frac{1}{2}e^{2x+3}+C.$$

Таким образом, мы получили искомый интеграл: $\int e^{2x+3}dx=\frac{1}{2}e^{2x+3}+C$.

Можно убедиться в правильности решения, если продифференцировать полученную первообразную:
$$\left(\frac{1}{2}e^{2x+3}+C\right)'=\frac{1}{2}e^{2x+3}\cdot(2x+3)'=\frac{1}{2}e^{2x+3}\cdot 2=e^{2x+3}.$$

Задания для решения:

Найти неопределённый интеграл:

240. $\int(x^2+1)dx$;

241. $\int(\cos x+x)dx$;

242. $\int(1-\cos 3x)dx$

243. $\int\left(\frac{1}{x^2}-4\sin x\right)dx$

244. $\int\frac{1}{\sqrt{3x-2}}dx$

245. $\int\frac{1}{(5x-7)^3}dx$

246. $\int\frac{3}{\cos^2 5x}dx$

251. $\int\left(\frac{1}{x}+2\right)dx$.

252. $\int(5x^2-1)dx$

253. $\int\left(7\sin\frac{x}{3}+\frac{2}{\cos^2 4x}\right)dx$

254. $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$

255. $\int\frac{x^4}{1+x^2}dx$

256. $\int\sin^2\frac{x}{2}dx$

257. $\int 2e^{\sin x}\cdot\cos x dx$

247. $\int \cos^2 x dx$

248. $\int \cos^3 x \cdot \sin x dx$

249. $\int e^{x^3} \cdot x^2 dx$

250. $\int \left(2\sin\frac{x}{5} + 3\cos 6x \right) dx$

258. $\int \frac{5}{\sqrt{2x+7}} dx$

259. $\int (2x^2 - 4x^3) dx$

260. $\int \frac{2x^2 + x}{x} dx$

Тема № 19.

1. **Геометрический смысл определённого интеграла: площадь криволинейной трапеции.**
2. **Свойства определенного интеграла. Формула Ньютона – Лейбница.**
3. **Применение метода замены переменной для вычисления определенного интеграла.**

1. Геометрический смысл определённого интеграла: площадь криволинейной трапеции.

Понятие определенного интеграла широко используется в математике и в различных прокладных науках. Например, при вычислении площадей фигур, ограниченных кривыми, объемов тел произвольной формы, работы переменной силы, и т. д. В свою очередь, задача вычисления площади криволинейной трапеции приводит к определению понятия определенного интеграла.

Пусть имеется непрерывная функция $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Фигуру, ограниченную сверху кривой $y = f(x)$ с ординатами AA_0, BA_n и снизу отрезком $[a;b]$ оси абсцисс называют криволинейной трапецией AA_0A_nB (рис. 68).

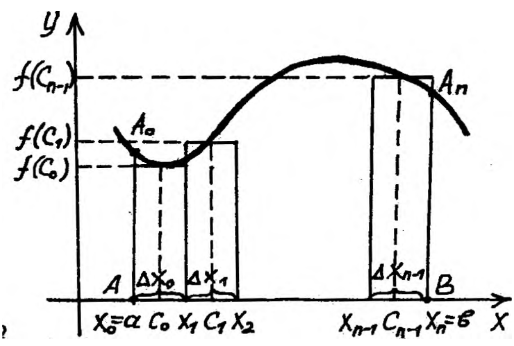


Рис. 68

Найдём площадь этой криволинейной трапеции. Для этого:

1) Разобьем отрезок $[a;b]$ на n необязательно равных частей и обозначим точки следующим образом: $a = x_0 < x_1 < x_2 ... < x_n = b$
2) Из этих точек $x_1, x_2, ... x_{n-1}$ восстановили перпендикуляры до пересечения с кривой $y = f(x)$. Таким образом мы всю нашу криволинейную трапецию разбили на n элементарных трапеций
3) В произвольной точке C_i каждого из отрезков Δx_i найдём значение $f(C_i)$ $(f(C_0), f(C_1)...f(C_{n-1}))$. Построим ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников с основаниями Δx_i и высотами $f(C_i)$.
4) Элементарная площадь i-го прямоугольника будет $S_i = f(C_i)(x_{i-1} - x_i)$
5) Площадь всей ступенчатой фигуры, покрывающей криволинейную трапецию, будет равна сумме площадей прямоугольников, из которых состоит ступенчатая фигура:

$$S_n = f(C_0)(x_1 - x_0) + f(C_1)(x_2 - x_1) + ... + f(C_{n-1})(x_n - x_{n-1})$$

Поставим вместо знака «+» знак суммы «$\sum$»:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(C_i)(x_{i-1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(C_i)\Delta x_i .$$

Эта сумма S_n, которая называется ***интегральной суммой***, может быть больше или меньше истинного значения площади искомой трапеции. Наиболее близким значением к истинной величине площади будет предел интегральной суммы при условии, что элементарные отрезки Δx_i будут очень маленькими, т. е. длинна наибольшего из них будет стремиться к нулю ($\max \Delta x_i \to 0$), а их самих будет больше ($n \to \infty$).Тогда:

$$S = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=0}^{n-1} f(C_i)\Delta x_i .$$

Этот предел интегральной суммы (если он существует) называется ***определённым интегралом от функции*** $f(x)$ ***на отрезке*** $[a;b]$ ***и обозначается***:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=0}^{n-1} f(C_i)\Delta x_i .$$

Читается: «определённый интеграл от a до b эф от икс дэ икс». Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, $f(x)$ - подынтегральной функцией, x – переменной интегрирования. Таким образом, ***площадь криволинейной трапеции численно равна интегралу от функции, ограничивающей трапецию, взятому на интервале интегрирования*** $[a;b]$:

$$S = \int_a^b f(x)dx .$$

Это и есть геометрический смысл определённого интеграла.

Примечание. Определённый интеграл – это число, в отличие от неопределённого интеграла, который равен совокупности функций – первообразных.

2. Свойства определённого интеграла. Формула Ньютона – Лейбница.

Рассмотрим ***свойства определенного интеграла***:

1. определённый интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_0}^{t} f(t)dt = \int_{u_0}^{t} f(u)du$$

2. Определённый интеграл от суммы конечного числа непрерывных функций, заданных на отрезке $[a,b]$ равен сумме определённых интегралов слагаемых функций:

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x) + ...)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + ...$$

3. Постоянный множитель «k» в подынтегральном выражении выносится за знак интеграла:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx .$$

4. Если верхний и нижний пределы интегрирования поменять местами, то определённый интеграл изменит свой знак на противоположный, сохранив абсолютную величину:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx .$$

5. Если существуют интегралы $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$, то существует также $\int_a^b f(x)dx$ для любого взаимного расположения точек a,b,c:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

6. $\int_a^b dx = b - a$ при $a \neq b$. Это свойство вытекает из того, что неопределённый интеграл $\int_a^b dx = x$, т. е. равен некоторой длине отрезка, началом и концом которого будут точки a и b этого отрезка.

Формула Ньютона – Лейбница.

Как отмечалось выше, неопределённый интеграл – это совокупность первообразных функций, а определённый интеграл – число. Между ними существует определённая связь, которую устанавливает формула Ньютона – Лейбница и выражается в виде теоремы.

Теорема. Значение определённого интеграла равно разности значений любой первообразной от подынтегральной функции, взятой при верхнем и нижним пределах интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a), \text{ где } F'(x) = f(x).$$

Таким образом, нахождение определённого интеграла сводится к следующим операциям:

1) находят первообразную для данной функции;
2) вычисляют первообразную для данных частных значений верхнего и нижнего пределов интегрирования (подставляют пределы интегрирования в первообразную вместо x);
3) находят разность частных значений первообразной $F(b) - F(a)$.

Например: $\int_2^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4}|_2^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{2^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{16}{4} = 20{,}25 - 4 = 16{,}25$.

Как и для неопределённого интеграла, этот метод называется методом непосредственного интегрирования. Он применим для наиболее простых функций и использует первообразные, которые есть в таблице неопределенных интегралов. Если же интегрируемая функция является сложной, и её непосредственно проинтегрировать не получается, то применяют другие методы, например, метод замены переменной.

3. Применение метода замены переменной интегрирования для вычисления определённого интеграла.

Из установленной с помощью формулы Ньютона-Лейбница связи между определённым и неопределенным интегралами следует, что для вычисления определённого интеграла можно также применять метод замены переменной. Так же, как и для неопределенного интеграла, вводится новая переменная, с помощью которой интеграл становится табличным. Отличие состоит в том, что при этом обязательно нужно заменить пределы интегрирования определенного интеграла. Рассмотрим применение метода замены переменной интегрирования дл вычисления определенного интеграла на примере. Найдем определенный интеграл

$$\int_0^{\pi/2} e^{\sin x} \cdot \cos x dx.$$

Последовательность действий следующая:

1. Введём новую переменную t, связанную с x следующей зависимостью:

$$t = \sin x\,;$$

2. Возьмём дифференциал от левой и правой части этого равенства:

$$d(\sin x) = dt$$

$$\cos x dx = dt\ ;$$

$$dx = \frac{dt}{\cos x}$$

3. Найдем новые пределы интегрирования, т. к., согласно свойству определенного интеграла, изменение переменной интегрирования требует изменения пределов интегрирования:

$$t_{верх} = \sin\frac{\pi}{2}\,;$$

$$t_{нижн} = \sin 0$$

4. Теперь вместо *sinx* и *dx* в подынтегральное выражение подставим их выражения через новую переменную t, а вместо старых пределов подставим новые и применим формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int\limits_0^{\pi/2} e^{\sin x}\cdot\cos x dx = \left|\begin{array}{l} \sin x = t \\ d(\sin x) = dt \\ \cos x dx = dt \\ t_{верх.} = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1 \\ t_{нижн} = \sin 0 = 0 \end{array}\right| = \int\limits_0^1 e^t dt = e^t\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = 2{,}7 - 1 = 1{,}7\,.$$

Таким образом, мы вычислили определенный интеграл.

Примечание. Новая переменная выбирается так, чтобы новый интеграл стал табличным.

Задания для решения:

Вычислить определенный интеграл:

261. $\int\limits_{-1}^{2} x^2 dx$

262. $\int\limits_0^{\pi} \sin x dx$

263. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$

264. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x^3}$

267. $\int\limits_0^3 2^{5x+1} dx$

268. $\int\limits_0^1 e^{3x-2} dx$

269. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin 2x dx$

270. $\int\limits_0^{\pi/3} e^{\cos x}\cdot\sin x dx$

265. $\int_{-1}^{2}\frac{dx}{(2x+1)^2}$

266. $\int_{1}^{6}\frac{dx}{\sqrt{x+3}}$

271. $\int_{0}^{\pi/2}\sin x\cdot\cos^2 x dx$

272. $\int_{0}^{\pi/2}\sin^2 x dx$.

РУССКО – АНГЛИЙСКИЙ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СЛОВАРЬ – МИНИМУМ

А

АБСОЛЮТНЫЙ	absolute
абсолютная величина	absolute value
абсолютное значение	absolute value
абсолютная ошибка	absolute error
абсолютная погрешность	absolute error
АБСЦИССА	abscissa
ось абсцисс	axis of abscissa, x-axis, axis of x
АКСИОМА	axiom
АЛГЕБРА	algebra
АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ, -ая, -ое, -ие	algebraical
алгебраическое выражение	algebraic (al) expression
алгебраическое действие	algebraic (al) operation
алгебраическая дробь	algebraic (al) fraction
алгебраический корень	algebraic (al) root
алгебраическое уравнение	algebraic (al) equation
АНАЛИЗ	analysis
АНАЛИЗИРОВАТЬ, /, нес. в., что? (1 л. мн. ч. АНАЛИЗИРУЕМ), ПРОАНАЛИЗИРОВАТЬ, /, сов. в.	to analyze
АНАЛИТИЧЕСКИЙ, -ая, -ое, -ие	analytical
аналитическая геометрия	analytic (al) geometry
аналитическая кривая	analytic curve
аналитический метод	analytic (al) method
аналитический способ	analytic (al) method
аналитическое решение	analytical solution
аналитическая функция	analytic function
АНАЛОГИЧНО, чему? нареч.	analogically, similarly
аналогично предыдущему уравнению	similarly to the previous equation
АНАЛОГИЧНЫЙ	analogical, similar
аналогичный пример	analogical example
аналогичный случай	similar case
АНАЛОГИЯ	analogy
по аналогии (с чем?)	by analogy (with), on the analogy (of)
по аналогии с предыдущим примером	by analogy with the previous example
АРГУМЕНТ	argument
аргумент комплексного числа	argument of a complex number
аргумент функции	argument of a function
АРИФМЕТИКА	arithmetic
АРИФМЕТИЧЕСКИЙ, -ая, -ое, -ие	arithmetic (al)
арифметическое действие	arithmetic (al) operation
арифметическое значение корня	arithmetic (al) value of a root
арифметический корень	arithmetic (al) root
арифметическая прогрессия	arithmetic (al) progression
арифметическая пропорция	arithmetic (al) proportion
среднее арифметическое	arithmetic (al) mean
АРККОСЕКАНС	arc-cosecant
АРККОСИНУС	arc-cosine
АРККОТАНГЕНС	arc-cotangent

АРКСЕКАНС	arc-secant
АРКСИНУС	arc-sine
АРКТАНГЕНС	arc-tangent

Б

БЕЗГРАНИЧНЫЙ	infinite, boundless
безграничное пространство	infinite space
БЕСКОНЕЧНО, нареч.	infinitely, endlessly
бесконечно большая величина	infinite quantity
бесконечно малая величина	infinitesimal quantity
бесконечно убывающая (возрастающая) прогрессия	infinitely decreasing (increasing) progression
БЕСКОНЕЧНОСТЬ	infinity
от нуля до бесконечности	from zero to infinity
БЕСКОНЕЧНЫЙ	infinite
бесконечная десятичная дробь	infinite decimal fraction
бесконечное множество	infinite multitude
бесконечная прогрессия	infinite progression
бесконечная прямая	infinite straight line
бесконечный ряд	infinite series
БИКВАДРАТНЫЙ	biquadratic
биквадратное уравнение	biquadratic equation
БИССЕКТРИСА	bisector, bisectrix
биссектриса угла	bisector of an angle
биссектриса треугольника	bisector of a triangle
БОКОВОЙ	lateral
боковая грань	lateral face
боковая поверхность	lateral surface
боковое ребро	lateral edge
боковая сторона	lateral side
БОЛЕЕ	more
две пересекающиеся окружности могут иметь не более двух общих точек	two intersecting circumferences may have not more than two common points
БОЛЬШЕ, чего? (ант. меньше)	greater (ant. smaller, less)
пять больше трех	five is greater than three
БОЛЬШИЙ, -ая, -ее, -ие (ант. меньший)	greater (ant. lesser)
больший отрезок	greater segment
большая сторона	greater side
больший угол	greater angle
БРАТЬ, /, нес. в. что?, чем?, за что?, (1 л. мн. ч. БЕРЕМ), ВЗЯТЬ, /, сов. в., (1 л. мн. ч. ВОЗЬМЁМ)	to take
брать точку на прямой	to take a point on a straight line
брать (принимать) горизонтальную ось за ось абсцисс	to take horizontal axis for x-axis

В

ВВЕДЕНИЕ	introduction
введение вспомогательного неизвестного	to introduce an auxiliary unknown
ВВЕСТИ (см. вводить)	
ВВОДИТЬ, //, нес. в., что?, куда?, ВВЕСТИ, /, сов. в., (1 л. мн. ч. ВВЕДЁМ; прош. вр. ВВЁЛ, ВВЕЛИ)	to introduce, to put in
вводить число под знак корня (радикала)	to put a number under a radical sign
ВДОЛЬ	along
ВЕКТОР	vector
радиус-вектор	radius vector
ВЕЛИЧИНА, род. п., ед. ч. ВЕЛИЧИНЫ им. п., мн. ч. ВЕЛИЧИНЫ	quantity, value
абсолютная величина	absolute value, absolute quantity
бесконечно большая (малая) величина	infinite (infinitesimal) quantity
возрастающая величина	increasing quantity
зависимая величина	dependent quantity
заданная величина	given value
искомая величина	value sought for, unknown value
исходная величина	initial value
мнимая величина	imaginary value
монотонно-возрастающая величина	monotonically increasing quantity
монотонно-убывающая величина	monotonically decreasing quantity
натуральная величина	natural size
независимая величина	independent quantity
неизвестная величина	unknown quantity
несоизмеримые величины	incommensurable quantities
обратная величина	reciprocal
однородные величины	homogeneous quantities
отрицательная величина	negative quantity
переменная величина	variable quantity
положительная величина	positive quantity
постоянная величина	constant quantity
приближённая величина	approximate value
производная величина	derivative quantity
пропорциональные величины	proportional quantities
противоположные величины	opposite quantities
случайная величина	random variables
соизмеримые величины	commensurable quantities
средняя величина	mean value
численная величина	numerical quantity
ВЕРОЯТНОСТЬ	probability
теория вероятности	theory of probability
ВЕРОЯТНЫЙ	probable
вероятная ошибка	probable error
ВЕРНЫЙ	proper, correct, true
верное решение	correct solution
равенство, верное при всех числовых значениях букв	equality holds true with every numerical values of letters

ВЕРТИКАЛЬ, ж. р.	vertical (line)
по вертикали	vertically
ВЕРТИКАЛЬНО, нареч.	vertically
ВЕРТИКАЛЬНЫЙ	vertical
вертикальный диаметр	vertical diameter
вертикальная линия	vertical line
вертикальная ось	vertical axis
вертикальные углы	vertical angles
ВЕРХНИЙ	upper
верхняя граница	upper bound
верхний предел	upper limit
ВЕРШИНА	vertex, apex
вершина многоугольника	vertex of a polygon
вершина параболы	vertex of a parabola
вершина пирамиды	vertex of a pyramid
вершина треугольника	vertex of a triangle, apex of a triangle
вершина угла	vertex of an angle
ВЕТВЬ, ж. р.	branch
ветвь гиперболы	branch of a hyperbola
ветвь кривой	branch of a curve
ВЕЩЕСТВЕННЫЙ (см. действительный)	
вещественная часть	real part
вещественное число	real number
ВЗАИМНО, нареч.	mutually
взаимно обратный	reciprocal
взаимно обратные величины	reciprocal quantities
взаимно обратные дроби	reciprocal fractions
взаимно обратные функции	reciprocal functions
взаимно обратные числа	reciprocal numbers
взаимно пересекающиеся прямые	mutually intersecting lines
взаимно противоположные величины	mutually contrary quantities
взаимно уничтожаться	to cancel out
ВЗАИМНЫЙ	mutual
ВЗЯТЬ (см. брать)	
ВЗЯТЫЙ	taken
произвольно взятая точка	point taken arbitrarily
ВИД	form, shape
вид уравнения	form of an equation
вид функции	form of a function
нормальный вид	normal form
общий вид	general form
частный вид	particular form
приводить к простейшему виду	to reduce to the simplest form
принимать вид	to take shape (form)
ВНЕШНИЙ (ант. внутренний)	external, exterior (ant, interior)
ВНУТРИ (ант. вне)	inside (ant. outside)
внутри угла	inside an angle
ВОГНУТЫЙ (ант. выпуклый)	concave (ant. convex)
ВОЗВЕДЕНИЕ В СТЕПЕНЬ	raising to a power, involution

(син. возвышение в степень)	
возведение в целую (дробную, нулевую, положительную, отрицательную) степень	raising to an integral (fractional, zero, positive, negative) power
ВОЗВЕДЕННЫЙ	raised
число, возведённое в степень	number raised to a power
ВОЗВЕСТИ (см. возводить)	
ВОЗВОДИТЬ, //, нес. в., что?, во что?, (1 л. мн. ч. ВОЗВЕДЁМ), прош. вр. ВОЗВЁЛ, ВОЗВЕЛИ (син. возвышать)	to raise, to involute, to involve
возводить число во вторую степень (в третью, в n-ю степень)	to raise a number to the second power (the third power, the n power)
ВОЗРАСТАНИЕ (ант. убывание)	increasing (ant. decreasing), ascending
по мере возрастания	while increasing
при возрастании	while increasing
располагать числа в порядке возрастания	to arrange numbers in ascending order
ВОССТАВЛЯТЬ, /, нес. в., что?, к чему?, в чём?, ВОССТАВИТЬ, //, сов. в	to raise, to erect
восставить перпендикуляр к прямой А В в точке С	erect the perpendicular to the straight line AB at the point C
ВЫБИРАТЬ, /, нес. в. что?, ВЫБРАТЬ, /, сов. в. (1 л. мн. ч. ВЫБЕРЕМ)	to choose, to select
выбирать точку	to select a point
ВЫБРАТЬ (см. выбирать)	
ВЫВЕДЕННЫЙ	deduced
выведенная формула	deduced formula
ВЫВЕСТИ (см. выводить)	
ВЫВОД, из чего?	conclusion, deduction
делать вывод из сказанного	to draw a conclusion from the above mentioned
1. ВЫВОДИТЬ (выносить), //, нес. в., что?, из чего?, ВЫВЕСТИ, /, сов. в. (1 л. мн. ч., ВЫВЕДЕМ; прош. вр. ВЫВЕЛ. ВЫВЕЛИ)	to take out
выводить множитель из-под знака радикала	to take a multiplier out of radical
2. ВЫВОДИТЬ, //, нес. в., что?, ВЫВЕСТИ, /, сов. в., из чего?	to deduce
выводить (вывести) формулу	to deduce a formula
ВЫДЕЛИТЬ (см. выделять)	
ВЫДЕЛЯТЬ, /, нес. в., что?, ВЫДЕЛИТЬ, //, сов. в.	to take out
выделять целое число из неправильной дроби	to take out a whole number from an improper fraction
ВЫНЕСЕНИЕ, чего?, за что?	carrying out, taking out
вынесение из-под знака корня (радикала)	carrying out of radical
вынесение множителя за скобки	taking out (carrying out) of the common factor of brackets
ВЫНОСИТЬ, //, нес. в., что?, за что?, откуда?, чем?, ВЫНЕСТИ, /, сов. в. (1 л.	to take out, to carry out

мн. ч. ВЫНЕСЕМ; прош. вр. ВЫНЕС, ВЫНЕСЛИ)	
выносить выражение (множитель) за скобки	to take an expression out of brackets (as a factor)
выносить число из-под знака радикала	to take a number out of radical
ВЫПИСАТЬ (см. выписывать)	
ВЫПИСЫВАТЬ, /, нес. в., что?, ВЫПИСАТЬ, /, сов. в. (1 л. мн. н. ВЫПИШЕМ)	to copy out, to write out, to extract
выписывать данные из условия задачи	to copy out data from condition of a problem
выписывать члены уравнения, содержащие x	to copy out the terms of an equation containing x
ВЫПОЛНИТЬ (см. выполнять)	
ВЫПОЛНЯТЬ, /, нес. в., что?, ВЫПОЛНИТЬ, //, сов. в. (син. делать, производить)	to carry out, to do
выполнять действие	to carry out an operation
выполнять построение	to do a construction
ВЫПУКЛЫЙ (ант. вогнутый)	convex (ant. concave)
выпуклая кривая	convex curve
выпуклая ломаная	convex broken line
выпуклый многогранник	convex polyhedron
выпуклый многоугольник	convex polygon
выпуклая поверхность	convex surface
ВЫРАЖАТЬ, /, нес. в., что?, в виде чего?, через что?, в чём?, чем?, ВЫРАЗИТЬ, //, сов. в.	to express (in form of)
выражать длину отрезка числом	to express the length of a segment in figures
выражать зависимость в виде уравнения	to express dependence in the form of an equation
выражать x через y	to express x in terms of y, to express x through y
выражать число в процентах	to express a number in percentage
ВЫРАЖАТЬСЯ, /, нес. в., чем?, ВЫРАЗИТЬСЯ, //, сов. в.	to be expressed in form of
выражаться формулой	to be expressed as a formula
ВЫРАЖЕНИЕ, чего?, в чём?, через что?	expression
выражение дроби в процентах	expression of a fraction in percentage
алгебраическое выражение	algebraic(al) expression
буквенное выражение	expression in letters
подкоренное выражение	radicand expression
ВЫРАЖЕННЫЙ, в виде чего?, через что?	expressed
зависимость, выраженная в виде формулы	dependence expressed as a formula
член уравнения, выраженный через x	term of an equation expressed through x
ВЫРАЗИТЬ (см. выражать)	
ВЫСОТА	altitude

высота конуса	altitude of a cone
высота параллелограмма	altitude of a parallelogram
высота пирамиды	altitude of a pyramid
высота призмы	altitude of a prism
высота сегмента	altitude of a segment
высота трапеции	altitude of a trapezium
высота треугольника	altitude of a triangle
высота цилиндра	altitude of a cylinder
ВЫТЕКАТЬ, /, нес в., из чего? (син. следовать)	to follow
из теоремы вытекает следствие	the consequence follows from a theorem
ВЫХОДЯЩИЙ, -ая, -ее, -ие, из чего?	going out
луч, выходящий из точки А	ray going out of point A
ВЫЧЕРКНУТЬ (см. вычёркивать)	
ВЫЧЁРКИВАТЬ, /, нес. в., что?, ВЫЧЕРКНУТЬ, /, сов. в.	to cancel
ВЫЧЕСТЬ (см. вычитать)	
ВЫЧИСЛЕНИЕ	calculation
приближённое вычисление	approximate (rough) calculation
точность вычисления	accuracy of calculation
делать вычисление	to carry out a calculation
производить вычисление	lo make calculation
ВЫЧИСЛЕННЫЙ	calculated
результат, вычисленный с данной степенью точности	result calculated with the given degree of accuracy
ВЫЧИСЛИТЬ (см. вычислять)	
ВЫЧИСЛЯТЬ, /, нес. в., что, ВЫЧИСЛИТЬ, //, сов в.	to calculate
вычислить 20% от 60	to calculate 20% from 60
ВЫЧИТАЕМОЕ, сущ.	subtrahend
ВЫЧИТАНИЕ (ант. сложение)	subtraction (ant. addition)
ВЫЧИТАТЬ, /, нес. в., что?, из чего? ВЫЧЕСТЬ, /, сов. в. (1 л., мн. ч ВЫЧТЕМ; прош. вр. ВЫЧЕЛ, ВЫЧЛИ)	to subtract, to take
вычесть три из пяти	to take three from five

Г

ГЕКСАЭДР (син. шестигранник)	hexahedron
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ, -ая, -ое, -ие	geometric (al)
геометрическое место точек	geometric (al) locus of points
геометрическая прогрессия	geometric (al) progression
геометрическое тело	geometric (al) solid
геометрическая фигура	geometric (al) figure
среднее геометрическое	geometric (al) mean
ГЕОМЕТРИЯ	geometry
геометрия Лобачевского	Lobatchevski geometry
аналитическая геометрия	analytical geometry
Евклидова геометрия	Euclidian geometry
начертательная геометрия	descriptive geometry

Неевклидова геометрия	non-euclidian geometry
ГИПЕРБОЛА	hyperbola
ГИПОТЕЗА	hypothesis
ГИПОТЕНУЗА	hypotenuse
ГОРИЗОНТ	horizon
ГОРИЗОНТАЛЬ, ж. р.	horizontal
по горизонтали	horizontally
ГОРИЗОНТАЛЬНО, нареч.	horizontally
ГОРИЗОНТАЛЬНЫЙ	horizontal
горизонтальный диаметр	horizontal diameter
горизонтальная линия	horizontal line
горизонтальная ось	horizontal axis
горизонтальная плоскость	horizontal plane
ГРАДУС	degree
дуговой градус	arc degree
угловой градус	angular degree
ГРАДУСНЫЙ	degree
градусная мера	degree measure
ГРАНИЦА	bound, boundary, limit
граница плоскости	bound of a plane
верхняя граница	upper bound, upper limit
нижняя граница	lower bound, lower limit
ГРАНЬ, ж. р.	face
грань двугранного угла	face of a dihedral angle
грань многогранника	face of a polyhedron
грань многогранного угла	face of a polyhedral angle
боковая грань	lateral face
ГРАФИК	graph, diagram
график функции	graph of a function
ГРАФИЧЕСКИ, нареч.	graphically
изобразить функцию графически	to give graphic image of a function
ГРАФИЧЕСКИЙ, -ая, -ое, -ие	graphic (al)
графическое изображение	graphic image
графическая интерполяция	graphic interpolation
графическое решение	graphic (al) solution
графический способ решения	graphical method of solving
ГРУППА	group
ГРУППИРОВАТЬ, /, нес. в., что? (1 л. мн. ч. ГРУППИРУЕМ), СГРУППИРОВАТЬ, /, сов. в.	to group
группировать слагаемые	to group items
ГРУППИРОВКА	grouping
группировка слагаемых	grouping of items
группировка членов	grouping of terms
способ группировки	way (method) of grouping

Д

ДАНО, прич.	it is given
если дано ...	if it's given...

пусть дано ...	suppose given, let... be ...
ДАННЫЕ	data
исходные данные	initial data
цифровые данные	numerical data
ДАННЫЙ	given
данная величина	given quantity
данное число	given number
ДВАДЦАТИГРАННИК (син. икосаэдр	icosahedron
ДВЕНАДЦАТИГРАННИК (син. додекаэдр)	dodecahedron
ДВЕНАДЦАТИУГОЛЬНИК	dodecagon
ДВУГРАННЫЙ	dihedral
двугранный угол	dihedral angle
ДВУЗНАЧНЫЙ	two-digit, two-valued
двузначная функция	two-valued function
двузначное число	two-digit number
ДВУЧЛЕН	binomial
ДВУЧЛЕННЫЙ	binomial, two-term
двучленное уравнение	binomial equation
ДЕЙСТВИЕ	operation
действие над целыми числами	operation on whole numbers (integers
действия I, II, III ступени	the 1st, the 2nd, the 3d stage operations
арифметическое действие	arithmetic(al) operation
обратное действие	inverse operation
деление является обратным действием умножению	division is the inverse operation to multiplication
порядок действий	the order of operations
правила действий	rules of operations
ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЙ (син. вещественный)	real
действительное значение	real value
действительный корень	real root
действительная часть	real part
действительное число	real number
ДЕЛАТЬ, /, нес. в., что?, чем?, СДЕЛАТЬ, /, сов. в. (син. ВЫПОЛНИТЬ, ПРОИЗВОДИТЬ)	to do (syn. to make, to carry out, to produce)
делать вычисления	to carry out a calculation
делать первое число числителем	to make the first number a numerator
ДЕЛЕНИЕ, чего?, на что?	division
деление без остатка	exact division
деление дроби на целое число	division of fraction by an integer
деление на равные части	division into equal parts
деление пополам	halve
деление с остатком	division with a remainder
сокращённое деление	short division
ДЕЛЁННЫЙ, на что?	divided
число, делённое на два	number divided by two
ДЕЛИМОЕ, сущ.	dividend
ДЕЛИМОСТЬ, ж. р. только ед. ч.	divisibility

делимость чисел	divisibility of numbers
признаки делимости	special criteria for divisibility
ДЕЛИТЕЛЬ, м. р.	divisor
общий делитель	common divisor
наибольший общий делитель (НОД)	the greatest common divisor (GCD)
ДЕЛИТЬ, //, чес. в., что? на что?, чем? РАЗДЕЛИТЬ, //, сов. в. (ант. УМНОЖАТЬ).	to divide (ant. multiply)
делить дробь на целое число	to divide a fraction by an integer
делить многоугольник диагоналями	to divide a polygon by diagonals
1. ДЕЛИТЬСЯ, //, нес. в., на что?, РАЗДЕЛИТЬСЯ, //, сов. в.	to divide, to be divisible
делиться без остатка	to divide exactly without a remainder
делиться на два	to divide by two
делиться нацело	to divide without a remainder (about whole numbers)
делиться с остатком	to divide with a remainder
2. ДЕЛИТЬСЯ (классифицироваться), //, только нес. в., на что?	to subdivide into, to be subdivided into (to be classified)
целые числа делятся на чётные и нечётные	integers subdivide into even numbers and odd numbers
ДЕЛЯЩИЙ, -ая, -ее, -ие	dividing, divisible
линия, делящая угол пополам	line halving an angle, line bisecting an angle
ДЕЛЯЩИЙСЯ, -аяся, -ееся, -иеся	dividing
число, делящееся на два	number divisible by two
ДЕСЯТИГРАННИК	decahedron
ДЕСЯТИУГОЛЬНИК	decagon
ДЕСЯТИЧНЫЙ	decimal
десятичная дробь	decimal fraction
десятичный знак	decimal place
десятичный логарифм	common logarithm, Brigg's logarithm
десятичная система	decimal system
ДЕСЯТОК, род. п., ед. ч, ДЕСЯТКА, им. п. мн. ч. ДЕСЯТКИ, род. п. мн. ч. ДЕСЯТКОВ	a ten
ДЕЦИМЕТР	decimetre
ДИАГОНАЛЬ, ж. р.	diagonal
по диагонали	diagonally
ДИАГОНАЛЬНЫЙ	diagonal
диагональная плоскость	diagonal plane
диагональное сечение	diagonal section
ДИАМЕТР	diameter
диаметр круга	diameter of a circle
диаметр окружности	diameter of a circumference
диаметр шара	diameter of a ball
вертикальный диаметр	vertical diameter
горизонтальный диаметр	horizontal diameter
ДИАМЕТРАЛЬНО, нареч.	diametrically
диаметрально противоположный	diametrically opposite

ДИАМЕТРАЛЬНЫЙ	diametrical
диаметральная плоскость	diametrical plane
ДИСКРИМИНАНТ	discriminant
ДИФФЕРЕНЦИАЛ	differential
дифференциальное исчисление	differential calculus
ДЛИНА	length
длина окружности	length of a circumference
истинная длина	true length
мера длины	measure of length
отрезок длиной в 3 см	segment 3 cm in length
ДОКАЗАННЫЙ	proved
доказанная теорема	proved theorem
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО	proof
доказательство от противного	reductio ad absurdum proof, the rule of contraries
ДОКАЗАТЬ (см. доказывать)	
ДОКАЗЫВАТЬ, /, нес. в., что?, ДОКАЗАТЬ, /, сов. в. (1 л. мн. ч. ДОКАЖЕМ)	to prove, to demonstrate
доказывать теорему	to prove a theorem
... что и требовалось доказать	QED (Quod erat demonstrandum), which was to be proved
ДОЛЯ (син. часть)	part, share, portion
десятые (сотые, тысячные) доли числа	the tenth (the hundredth, the thousandth) parts of a number
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ	additional, complementary, supplement
дополнительный множитель	complementary multiplier
дополнительный угол	complementary angle, supplement angle
ДОПОЛНИТЬ (см. дополнять)	
ДОПОЛНЯТЬ, /, нес. в., что?, до чего?, ДОПОЛНИТЬ, //, сов. в.	to add, to supplement
дополнять левую часть уравнения до полного квадрата	to make the left part of an equation up to a perfect square
дополнять угол до 90°	to supplement an angle up to 90°, to make an angle 90°
ДОПУСКАТЬ, /, нес. в., ДОПУСТИТЬ. //, сов. в. (1 л. мн. ч. ДОПУСТИМ)	to assume, to admit
допускать, что А = В	to assume that A=B
ДОПУСТИМЫЙ	permissible, possible
допустимое значение	permissible value
ДОПУСТИТЬ (см. допускать)	
ДОСТАТОЧНО	sufficiently
достаточно большое число	sufficiently large number
необходимо и достаточно	it is necessarily and sufficiently
ДОСТАТОЧНЫЙ	sufficient
достаточное условие	sufficient condition
ДРОБНЫЙ	fractional
дробный показатель (дробная степень)	fractional exponent (fractional power)
дробное число	fractional number

ДРОБЬ, ж. р.	fraction
алгебраическая дробь	algebraical fraction
арифметическая дробь	arithmetical fraction
бесконечная дробь	continued fraction
десятичная дробь	decimal fraction
конечная дробь	finite fraction
неправильная дробь	improper fraction
обыкновенная дробь	vulgar fraction, simple fraction
периодическая дробь	recurrent continued fraction, periodical fraction
правильная дробь	proper fraction
простая дробь	simple fraction, vulgar fraction
свойство дробей	properties of fractions
смешанная дробь	mixed fraction
сократимая дробь	reducible fraction
чистая периодическая дробь	pure recurring continued fraction
ДУГА, род. п. ед. ч. ДУГИ, им. п. мн. ч. ДУГИ	arc
дуга окружности	arc of a circle (circumference)
ДУГОВОЙ	arc
дуговой градус	arc degree
дуговой радиан	arc radian

Е

ЕДИНИЦА	unit
единица длины	unit of length
единица измерения	unit of measurement
единица масштаба	unit of scale
единица объёма	unit of volume
единица площади	unit of area
линейная единица	linear unity, unity of length
мнимая единица	imaginary unit
основная единица	fundamental unit
производная единица	derived unit
ЕДИНСТВЕННЫЙ	the only, sole
единственное решение	unique solution
ЕСЛИ..., ТО...	if..., then...
если в уравнении a+b = c+d, и a = c, то и b = d	if in equation a+b = c+d and a = c, then b=d
если и только если ...	if and only if, when and only when..

З

ЗАВИСЕТЬ, //, только нес. в., от чего?	to depend on
знак произведения зависит от знаков сомножителей	sign of product depends on signs of factors
ЗАВИСИМОСТЬ, ж. р., между чем?, чего?, от чего?	dependence
зависимость знака произведения от	dependence of sign of product on signs of

знаков сомножителей	factors
зависимость между величинами	dependence between quantities
обратная зависимость	inverse dependence
прямая зависимость	direct dependence
функциональная зависимость	functional dependence
ЗАВИСИМЫЙ	dependent (on)
зависимая величина	dependent quantity
зависимая переменная	dependent variable
ЗАДАВАТЬСЯ, /, нес. в., чем?, (1 л. мн. ч. ЗАДАЁМСЯ), ЗАДАТЬСЯ, сов. в. (1 л. мн. ч. ЗАДАДИМСЯ)	to be given
функция задаётся уравнением	function is given by an equation
ЗАДАННЫЙ	given
заданная величина	given value, given quantity
заданный пример	given example
ЗАДАТЬСЯ (см. задаваться)	
ЗАДАЧА	problem
1. ЗАКЛЮЧАТЬ (выводить, резюмировать), /, нес. в., из чего?, ЗАКЛЮЧИТЬ, //, сов. в.	to conclude (to deduce, to summarize)
из сказанного заключаем, что $x>0$	from the above mentioned we conclude that $x>0$
2. ЗАКЛЮЧАТЬ, /, нес. в., что?, во что?, ЗАКЛЮЧИТЬ, //, сов. в.	to enclose, to put in
заключать в скобки	to put in brackets
ЗАКЛЮЧАТЬСЯ, /, нес. в., в чем?	to be enclosed, to be
задача заключается в том, чтобы...	the problem is that...
метод заключается в следующем	the method is as following
ЗАКЛЮЧЁННЫЙ, между чем?	contained
угол, заключённый между двумя сторонами	angle contained by two sides
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	conclusion
в заключение ...	in conclusion ...
ЗАКЛЮЧИТЬ (см. заключать)	
ЗАКОН	law
переместительный закон	commutative law
распределительный закон	distributive law
сочетательный закон	combinative law
ЗАКОНОМЕРНОСТЬ, ж. р.	regularity, conformity with a law
ЗАКОНОМЕРНЫЙ	regular, natural
закономерное явление	regular effect, natural phenomenon
ЗАМЕНА, чего?, чем?	substitution, replacement
замена коэффициентов свободными членами	replacement of coefficients by free terms
ЗАМЕНИТЬ (см. заменять)	
ЗАМЕНЯТЬ, /, нес. в., что?, чем?, ЗАМЕНИТЬ, //, сов. в.	to substitute
заменять параллелограмм равновеликим прямоугольником	to substitute a parallelogram for an equivalent rectangle
ЗАМЕЧАНИЕ	note, remark

ЗАМКНУТЫЙ	closed
замкнутая кривая	closed curve
замкнутая линия	closed line
замкнутая ломаная	closed broken line
ЗАМКНУТЬ (см. замыкать)	
ЗАМЫКАТЬ, /, нес. в., что?, ЗАМКНУТЬ, /, сов. в.	to close
замыкать ломаную линию	to close a broken line
ЗАМЫКАЮЩИЙ, -ая, -ее, -яе	closing
замыкающий отрезок	closing segment
ЗАНИМАТЬ, / нес. в., что?, ЗАНЯТЬ, /, сов. в. (3 л. ед. ч. ЗАЙМЕТ)	to occupy, to take
луч может занять положение OA	ray may take position OA
ЗАНЯТЬ (см. занимать)	
ЗАПАС	stock, reserve, margin
запас чисел	margin of numbers, reserve of numbers
ЗАПИСАТЬ (см. записывать)	
ЗАПИСЫВАТЬ, /, нес. в., что?, где?, в виде чего?, ЗАПИСАТЬ /, сов. в. (1 л. мн. ч. ЗАПИШЕМ)	to write down
записывать уравнение на доске	to write down an equation on the blackboard
записывать целое число в виде дроби	to write down a whole number (integer) in the form of a fraction
ЗАПОЛНИТЬ (см. заполнять)	
ЗАПОЛНЯТЬ, /, нес. в., что?, ЗАПОЛНИТЬ, //, сов. в.	to fill
заполнять таблицу	to fill a table
ЗАПОМИНАТЬ, /, сов. в., что?, ЗАПОМНИТЬ, //, сов. в.	to remember, to memorize, to keep in mind, to store
запоминать формулу	to remember a formula
ЗАПОМНИТЬ (см. запоминать)	
ЗАСЕЧКА	mark
сделать засечку радиусом	to make a mark using radius
ЗАШТРИХОВАТЬ (см.штриховать)	
ЗВЕЗДА	star
пятиугольная звезда	pentagonal star
ЗВЕНО, им. п. мн. ч. ЗВЕНЬЯ, род. п. мн. ч. ЗВЕНЬЕВ	link
звено ломаной	link of a broken line
ЗЕРКАЛЬНЫЙ	specular, mirror
зеркальное отражение	mirror reflection
зеркальная симметрия	mirror symmetry
ЗНАК	sign, symbol
знак вычитания	sign of subtraction
знак деления	sign of division
знак корня	radical sign, root sign
знак «минус»	minus-sign
знак «плюс»	plus-sign
знак подобия	sign of similarity

знак равенства	sign of equality
знак сложения	sign of addition
знак умножения	sign of multiplication
десятичный знак	decimal place
обратный знак	opposite sign
противоположный знак	opposite sign
под знаком корня	under radical sign
правило знаков	rule of signs
ЗНАМЕНАТЕЛЬ, м. р.	denominator
знаменатель геометрической прогрессии	common ratio of geometric (al) progression
знаменатель дроби	denominator of a fraction
общий знаменатель	common denominator
приводить дроби к общему знаменателю	to reduce fractions to a common denominator
ЗНАЧАЩИЙ, -ая, -ее, -ие	significant
значащие цифры	significant figures
ЗНАЧЕНИЕ	value
значение функции	function value
абсолютное значение	absolute value
действительное значение	real value
допустимое значение	permissible value
истинное значение	true value
отрицательное значение	negative value
положительное значение	positive value
приближённое значение	approximate value
числовое значение	numerical value
ЗНАЧИТ	mean, signify
возвести число в степень n – значит повторить его сомножителем n раз	to raise a number to the power of n means to repeat it as a factor n times
ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ	golden section
ЗОНА	zone
шаровая (сферическая) зона	spherical zone

И

ИДЕАЛЬНЫЙ	ideal
идеальное решение	ideal solution
ИЗБАВИТЬСЯ (см. избавляться)	
ИЗБАВЛЯТЬСЯ, /, нес. в., от чего?, ИЗБАВИТЬСЯ, //, сов. в.	to spare
избавляться от иррациональности	to spare from irrationality
ИЗБИРАТЬ, /, нес. в., что?, ИЗБРАТЬ, /, сов. в. (1 л. мн. ч. ИЗБЕРЁМ)	to choose
избирать способ решения	to choose method of solution
ИЗБРАТЬ (см. избирать)	
ИЗБЫТОК, род. п. ед. ч. ИЗБЫТКА (ант. недостаток)	surplus, excess (ant. deficiency, inadequacy, shortage)
отложиться с избытком	to mark off with excess
приближение по избытку	approximation by excess
ИЗВЕСТНЫЙ	known

известный член	known term
ИЗВЛЕКАТЬ, /, нес. в., что?, из чего?, ИЗВЛЕЧЬ, /, сов. в. (1 л. мн. ч. ИЗВЛЕЧЁМ, 3 л. ед. ч. ИЗВЛЕЧЕТ, 3 л. мн. ч. ИЗВЛЕКУТ, прош. вр. ИЗВЛЕК, ИЗВЛЕКЛИ)	to extract
извлекать корень из числа	to extract a root from a number
ИЗВЛЕКАТЬСЯ, /, нес. в., из чего?, ИЗВЛЕЧЬСЯ, /, сов. в. (3 л. ед. ч. ИЗВЛЕЧЁТСЯ, прош. вр. ИЗВЛЁКСЯ, ИЗВЛЕКЛИСЬ)	to be extracted
из данного числа корень не извлекается	it is impossible to extract a root from this number
ИЗВЛЕЧЕНИЕ, чего?, из чего?	extraction
извлечение корня из числа	extraction of a root from a number
ИЗВЛЕЧЬ (см. извлекать)	
ИЗВЛЕЧЬСЯ (см. извлекаться)	
ИЗГИБ	bend
ИЗЛАГАТЬ, /, нес. в., что?, ИЗЛОЖИТЬ, //, сов. в.	to explain, to set forth
излагать новый материал	to explain a new material
ИЗЛОЖИТЬ (см. излагать)	
ИЗМЕНИТЬ (см. изменять) ИЗМЕНЯТЬ, /, нес. в., что?, на что?, ИЗМЕНИТЬ, //, сов. в.	to change
изменять знак «плюс» на знак «минус»	to change "plus" by "minus"
ИЗМЕРЕНИЕ	measurement, dimension
измерение дуг	measurement of arcs
измерение масштаба	dimension of a scale
измерение площадей	measurement of areas
измерение углов	measurement of angles
иметь два (три) измерения	to have two (three) dimensions
ИЗМЕРИТЬ (см. измерять)	
ИЗМЕРЯТЬ, /, нес. в., что?, с помощью чего?, чем?, ИЗМЕРИТЬ, //, сов. в.	to measure
измерять длину отрезка с помощью линейки	to measure the length of a segment with the help of a ruler
измерять отрезок отрезком	to measure a segment with the help of another segment
ИЗМЕРЯТЬСЯ, /, нес. в., в чём?, чем?,	to be measured
вписанный угол измеряется половиной дуги	the inscribed angle is measured by half of the arc
углы и дуги окружности измеряются в угловых и дуговых градусах	angles and arcs are measured in angular and arc degrees
ИЗОБРАЖАТЬ, /, нес. в., что?, чем?, в виде чего?, на чём?, ИЗОБРАЗИТЬ, //, сов. в.	to express, to represent, to image
изображать действительные числа отрезками (в виде отрезков) на прямой	to express real numbers in the form of segments on a straight line
ИЗОБРАЖЕНИЕ	image

масштаб изображения	scale of image
графическое изображение	graphic image
ИЗОБРАЗИТЬ (см. изображать)	
ИКОСАЭДР (син. двадцатигранник)	icosahedron
ИЛЛЮСТРИРОВАТЬ, /, нес. в., что?, чем?, (1 л. мн. ч. ИЛЛЮСТРИРУЕМ) ПРОИЛЛЮСТРИРОВАТЬ, /, сов. в.	to illustrate
иллюстрировать примером	to illustrate by an example
ИМЕНОВАННЫЙ	concrete
именованное число	concrete number
ИМЕТЬ, /, нес. в.	to have
иметь решение	to have a solution
ИМЕЮЩИЙ, -ая, -ее, -ие	having
числа, имеющие знак «минус»	numbers with "minus" sign
ИНДЕКС	index
ИНТЕГРАЛ	integral
интегральное исчисление	integral calculus
ИНТЕРВАЛ	interval
ИНТЕРПОЛЯЦИЯ	interpolation
графическая интерполяция	graphic interpolation
линейная интерполяция	linear interpolation
числовая интерполяция	numerical interpolation
ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЬ, ж, р., только ед. ч.	irrationality
избавляться от иррациональности	to spare from irrationality
ИРРАЦИОНАЛЬНЫЙ	irrational
иррациональное уравнение	irrational equation
иррациональное число	irrational number
ИСКЛЮЧАТЬ, /, нес. в., что?, из чего?, ИСКЛЮЧИТЬ, //, сов. в.	to eliminate, to exclude
исключать x из уравнения	to eliminate x from an equation
исключать этот случай из рассмотрения	to eliminate this case from consideration
ИСКЛЮЧЕНИЕ	elimination
метод исключения	method of elimination
ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ	exceptional
исключительный случай	exceptional case
ИСКЛЮЧИТЬ (см. исключать)	
ИСКОМЫЙ	unknown, sought for
искомая величина	value sought for, unknown value
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ	utilization, using
ИСПОЛЬЗОВАТЬ, /, нес. в. и сов. в., что? (1 л. мн. ч. ИСПОЛЬЗУЕМ)	to utilize, to use
использовать циркуль	to use a pair of compasses
ИССЛЕДОВАНИЕ	analysis, research, investigation
исследование уравнения	analysis of an equation
ИССЛЕДОВАТЬ, /, нес. в. и сов. в., что? (1 л. мн. ч. ИССЛЕДУЕМ)	to analyse, to investigate
исследовать уравнение	to analyse an equation
ИССЛЕДУЕМЫЙ	analysed
исследуемая функция	analysed function

ИСТИННЫЙ	true, veritable
истинная длина	true length
истинное значение	true value
ИСХОДИТЬ, //, только нес. в. из чего?	to proceed (from), to come (from)
исходить из теоремы	to proceed from the theorem
луч исходит из точки О	ray proceeds (comes) from point O
ИСХОДНЫЙ	initial
исходная величина	initial value
исходные данные	initial data
исходное положение	initial position
ИСХОДЯ, из чего?	as follows from
исходя из теоремы ...	proceeding from the theorem, as follows from the theorem
ИСХОДЯЩИЙ, -ая, -ее, -ие	outgoing
исходящий луч	outgoing ray
ИСЧИСЛЕНИЕ	calculus
ИТАК (син. следовательно)	and so, thus (syn. therefore, consequently, hence)

К

КАЖДЫЙ	each, each one, every, every one
каждый член уравнения умножим на x	let us multiply every term of the equation by x
КАКОЙ-НИБУДЬ, ж. р. КАКАЯ-НИБУДЬ, с. р. КАКОЕ-НИБУДЬ, мн. ч. КАКИЕ-НИБУДЬ	some, any
возьмём какое-нибудь число	let us take any number
КАКОЙ УГОДНО	any
возьмём какое угодно число	let us take any number
КАРКАС	frame, framework
каркас фигуры	frame of a figure
КАСАНИЕ	contact
внешнее касание	outer contact
внутреннее касание	inner contact
точка касания	point of contact
КАСАТЕЛЬНАЯ, сущ.	tangent
построение касательной	construction of a tangent
КАСАТЕЛЬНЫЙ, к чему?	tangent
касательная плоскость	tangent plane
касательная прямая	tangent line
прямая, касательная к окружности в точке А	straight line tangential to a circle at point A
КАСАТЬСЯ, /, нес. в., чего?, в чём?, КОСНУТЬСЯ, /, сов. в.	to touch, to contact
касаться окружности в точке А	to touch a circle at point A
КАСАЮЩИЙСЯ, -аяся, -ееся, -иеся	touching
касающиеся окружности	touching circumferences
КАТЕТ	cathetus, a leg of a right triangle
КВАДРАНТ	quadrant

КВАДРАТ (фигура)	square (a figure)
вписанный квадрат	inscribed square
описанный квадрат	circumscribed square
точный квадрат	exact square
КВАДРАТ (вторая степень)	square (the second power)
квадрат разности	square of difference
квадрат суммы	square of sum
квадрат числа	square of a number, squared number
КВАДРАТНЫЙ	square, quadratic
квадратные скобки	square brackets
квадратный корень	square root
квадратный метр	square metre
квадратный трёхчлен	square trinomial
квадратный сантиметр	square centimetre
квадратное уравнение	quadratic equation
система квадратных уравнений	system of quadratic equations
КВАДРАТУРА КРУГА	squaring the circle
КИЛОГРАММ	kilogram
КИЛОМЕТР	kilometre
КЛАСС	period, class
класс единиц	units period
класс миллионов	millions period
класс тысяч	thousands period
КОЛИЧЕСТВЕННЫЙ	numerical, cardinal
количественное числительное	cardinal number
КОЛИЧЕСТВО	quantity
КЛАССИФИЦИРОВАТЬСЯ, (делиться), /, нес. в. (3 л. мн. ч. КЛАССИФИЦИРУЮТСЯ)	to be classified (syn. subdivide into, be subdivided into)
КОМПЛЕКСНЫЙ	complex
комплексное число	complex number
КОНЕЦ, род. п. ед. ч. конца, им. п. мн. ч. концы	end
конец радиуса	end of a radius
КОНЕЧНЫЙ (ант. начальный)	finite (ant. initial)
конечная десятичная дробь	finite decimal fraction
конечное множество	finite set
конечное положение	finite position
конечный ряд	finite series
КОНИЧЕСКИЙ, -ая, -ое, -ие	conic (al)
коническая поверхность	conic (al) surface
коническое сечение	conic (al) section
КОНТУР	profile, outline, contour
КОНУС	cone
вписанный конус	inscribed cone
наклонный конус	oblique cone
описанный конус	circumscribed cone
прямой конус	right cone
усечённый конус	truncated cone
вершина конуса	vertex of a cone

КОНУСООБРАЗНЫЙ	conical, cone-shaped
конусообразная форма	conical shape
КОНЦЕНТРИЧЕСКИЙ, -ая, -ое, -ие (ант. эксцентрический)	concentric (al) (ant. eccentric)
концентрические окружности	concentric (al) circles
КООРДИНАТЫ, только мн. ч.	coordinates
координаты точки	coordinates of a point
декартовы координаты	Cartesian coordinates
прямоугольные координаты	rectangular coordinates
текущие координаты	current coordinates
начало координат	origin of coordinates
КООРДИНАТНЫЙ	coordinate
координатные линии	coordinate lines
координатная плоскость	coordinate plane
координатный угол	coordinate angle
КОРЕНЬ, м. р., род. п., ед. ч. КОРНЯ им. п. мн. ч. КОРНИ	root
корень из числа	root of a number
корень уравнения	root of an equation
алгебраический корень	algebraic (al) root
арифметический корень	arithmetic (al) root
действительный корень	real root
квадратный корень	square root
кубический корень	cube root
посторонний корень	extraneous root
приближённое значение корня	approximate value of a root
КОСЕКАНС	cosecant
КОСИНУС	cosine
КОСИНУСОИДА	cosine curve
КОСНУТЬСЯ (см. касаться)	
КОСОУГОЛЬНЫЙ	oblique
косоугольный треугольник	oblique triangle
КОТАНГЕНС	cotangent
КОТАНГЕНСОИДА	cotangent curve
КОЭФФИЦИЕНТ	coefficient, factor
коэффициент подобия	coefficient of similarity
коэффициент пропорциональности	factor of proportionality
биноминальные коэффициенты	binomial coefficients
числовой коэффициент	numerical coefficient
КРАЙНИЙ	extreme
крайние члены пропорции	extreme terms of a proportion
КРАТНОЕ, сущ.	multiple
наименьшее общее кратное (НОК)	the least common multiple (LCM)
КРАТНОСТЬ, ж. р., только ед. ч.	multiplicity
КРАТНЫЙ, чему?	multiple
кратный корень	multiple root
кратное число	multiple number
числа, кратные пяти	numbers multiple of five
КРАТЧАЙШИЙ, -ая, -ее, -ие	the shortest
кратчайшее расстояние	the shortest distance

КРИВАЯ, сущ.	curve
аналитическая кривая	analytic curve
ветвь кривой	branch of a curve
замкнутая кривая	closed curve
КРИВОЙ	curve
кривая линия	curve line
кривая поверхность	curve surface
КРУГ	circle
площадь круга	area of a circle
четверть круга	quarter of a circle
КРУГЛЫЙ	round
круглые скобки	round brackets, parentheses
круглое тело	round figure
круглое число	round number
КРУГОВОЙ	circular
круговой сегмент	circular segment
круговой сектор	circular sector
круговое сечение	circular section
круговая функция	circular function
круговой цилиндр	circular cylinder
КУБ (геометрическое тело)	cube (solid)
КУБ (третья степень)	cube (the third power)
куб разности	cube of difference
куб суммы	cube of sum
куб числа	cube of a number, cubed number
КУБИЧЕСКИЙ, -ая, -ое, -ие	cubic
кубический корень	cubic root, cube root
кубический метр	cubic metre
кубический сантиметр	cubic centimetre
кубическое уравнение	cubic equation

Л

ЛЕВЫЙ	left, left-handed
левая часть уравнения	left-hand side of an equation, first member of an equation
ЛЕЖАТЬ, //, нес. в., где?	to lie
лежать в одной плоскости	to lie on the same plane
ЛЕЖАЩИЙ, -ая, -ее, -ие	lying
точка, лежащая на прямой	point lying on a line
ЛЕММА	lemma
ЛИНЕЙКА	ruler
логарифмическая линейка	slide-rule
ЛИНЕЙНЫЙ	linear
линейная единица	linear unity, unity of length
линейная зависимость	linear dependence l
линейная интерполяция	linear interpolation
линейный масштаб	linear scale, distance scale
система линейных уравнений	system of linear equations
линейная функция	linear function

ЛИНИЯ	line
линии центров	line of centres
вертикальная линия	vertical line
горизонтальная линия	horizontal line
замкнутая линия	closed line
кривая линия	curve line
ломаная линия	broken line
прямая линия	straight line
ЛИМИТ (син. предел)	limit
ЛИШНИЙ	extra
лишний корень уравнения	extra root of an equation
ЛИШЬ (син. только)	only
ЛОГАРИФМ	logarithm
десятичный логарифм	common (Brigg's) logarithm
натуральные логарифмы	natural logarithms
Неперовые логарифмы	Napierian logarithms
мантисса логарифма	mantissa of a logarithm
определение логарифма	determination of the logarithm
основание логарифма	base of a logarithm
свойства логарифмов	laws of logarithms
таблица логарифмов	table of logarithms
теоремы логарифмов	theorems of logarithms
характеристика логарифмов	characteristic index of logarithms
ЛОГАРИФМИРОВАНИЕ	finding of a logarithm
приведение к виду, удобному для логарифмирования	reduction to a form convenient for finding a logarithm
ЛОГАРИФМИРОВАТЬ, /, нес. в. (1 л. мн.ч. ЛОГАРИФМИРУЕМ), ПРОЛОГАРИФМИРОВАТЬ, /, сов. в.	to find a logarithm
ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ, -ая, -ое, -ие	logarithmic
логарифмическая линейка	slide-rule
логарифмические таблицы	tables of logarithms
ЛОГИКА	logic
ЛОГИЧЕСКИ, нареч.	logically
ЛОГИЧЕСКИЙ, -ая, -ое, -ие	logical
логическое рассуждение	logical reasoning
ЛОМАНАЯ, сущ.	broken line
выпуклая ломаная	convex broken line
замкнутая ломаная	closed broken line
ЛУЧ	ray
исходящий луч	outgoing ray
ЛЮБОЙ	any, every
любая точность	any precision (exactness)

М

МАКСИМУМ (ант. минимум)	maximum (ant. minimum)
МАКСИМАЛЬНЫЙ (ант. минимальный)	maximum (ant. minimal)
максимальное значение	maximum value
МАЛЫЙ	small

бесконечно малая величина	infinitesimal (quantity)
МАНТИССА	mantissa
мантисса логарифма	mantissa of a logarithm
МАСШТАБ	scale
масштаб изображения	scale of image
линейный масштаб	linear scale
определённый масштаб	definite scale
поперечный масштаб	diagonal scale, cross-scale
численный масштаб	numerical scale
единица масштаба	unity of a scale
измерение масштаба	dimension of a scale
МАСШТАБНЫЙ	scale
масштабный отрезок	scale length
МАТЕМАТИКА	mathematics
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ, -ая, -ое.	mathematical
математические выражения (определение, теорема, аксиома, следствие)	mathematical expressions (definition, theorem, axiom, consequence)
МЕДИАНА	median
медиана треугольника	median of a triangle
МЕЖДУ, чем?	between, among
между двумя точками	between two points
между двумя сторонами	between two sides
МЕНЬШЕ, чего? (ант. больше)	smaller, less (ant. greater)
пять меньше десяти	five is less than ten
МЕНЬШИЙ, -ая, -ее, -ие (ант. больший)	lesser (ant. greater)
меньший отрезок	lesser segment
меньший угол	lesser angle
МЕНЯТЬ, /, нес. в., что?, чем?, ПОМЕНЯТЬ, /, сов. в.	to change
менять слагаемые местами	to change items by places
МЕРА	measure
мера веса	measure of weight
мера длины	measure of length, linear measure
мера объёма	measure of volume
градусная мера	degree measure
общая мера	common measure
радианная мера	radian measure
метрическая система мер	metric system (of measure)
МЕСТО	place
геометрическое место точек	points locus, geometric(al) locus of points
МЕТОД	method
метод исключения	method of elimination
метод подобия	method of similarity
аналитический метод	analytic (al) method
МЕТР	metre
квадратный метр	square metre
кубический метр	cubic metre
МЕТРИЧЕСКИЙ, -ая, -ое, -ие	metric
метрическая система мер	metric system (of measure)

МИЛЛИАРД (син. биллион)	milliard (10^9)
МИЛЛИМЕТР	millimetre
МИЛЛИОН	million
МИНИМУМ (ант. максимум)	minimum (ant. maximum)
МИНИМАЛЬНЫЙ (ант. максимальный)	minimal (ant. maximum)
минимальное значение	minimal value
МИНУС (ант. плюс)	minus (ant. plus)
МИНУТА	minute
МНИМЫЙ	imaginary
мнимая величина	imaginary quantity
мнимая единица	imaginary unit
мнимая часть	imaginary part
мнимое число	imaginary number
МНОГОГРАННИК	polyhedron
выпуклый многогранник	convex polyhedron
правильный многогранник	regular polyhedron
МНОГОГРАННЫЙ	polyhedral
многогранный угол	polyhedral angle
МНОГОЗНАЧНЫЙ	multiciphered; several figures
многозначная функция	multiple-valued function
многозначное число	number expressed by several figures
МНОГОУГОЛЬНИК	polygon
вогнутый многоугольник	concave polygon
вписанный многоугольник	inscribed polygon
выпуклый многоугольник	convex polygon
одноимённые многоугольники	polygons of the same name
описанный многоугольник	circumscribed polygon
правильный многоугольник	regular polygon
МНОГОУГОЛЬНЫЙ	polygonal
МНОГОЧЛЕН (син. полином)	polynom, polynomial
многочлен, расположенный по степеням x	polynomial disposed according to powers of x
приведенный многочлен	reduced polynomial
степень многочлена	power of a polynomial
МНОЖЕСТВО	multitude
бесконечное множество	infinite multitude
бесчисленное множество	innumerable multitude
конечное множество	finite set
ограниченное множество	bounded set
МНОЖИМОЕ, сущ.	multiplicand
МНОЖИТЕЛЬ, м. р.	multiplier; factor
дополнительный множитель	additional factor
недостающий множитель	missing multiplier
общий множитель	common multiplier
простой множитель	prime factor
разложение на множители	factorisation; resolution into factors
МОДЕЛЬ, ж. р.	model, pattern
модель фигуры	model of a figure
МОДУЛЬ, м. р. (син. абсолютная величина)	modulus (syn. absolute quantity)

модуль комплексного числа	modulus of a complex number
МОНОТОННО-ВОЗРАСТАЮЩИЙ, -ая, -ее, -ие (ант. монотонно-убывающий)	monotonically increasing (ant. monotonically decreasing)
монотонно-возрастающая величина	monotonically increasing quantity
монотонно-возрастающая последовательность	monotonically increasing sequence
монотонно-возрастающая функция	monotonically increasing function
МОНОТОННО-УБЫВАЮЩИЙ, -ая, ее, -ие (ант. монотонно-возрастающий)	monotonically decreasing (ant. monotonically increasing)
МОНОТОННЫЙ	monotone

Н

НАГЛЯДНЫЙ	graphic, obvious
наглядное изображение	obvious image
НАЗВАНИЕ	name, denomination
название фигуры	denomination of a figure
НАЗЫВАТЬСЯ, *I*, нес. в., чем?	to be called
правильным многоугольником называется многоугольник с равными сторонами и углами	regular polygon is called a polygon with equal sides and angles
НАИБОЛЬШИЙ, -ая, -ее, -ие (ант. наименьший)	the greatest (ant. the least)
наибольший общий делитель (НОД)	the greatest common divisor (G. C. D.)
НАИМЕНОВАНИЕ	denomination
однородные наименования	homogeneous denominations
разнородные наименования	heterogeneous denominations
НАИМЕНЬШИЙ, -ая, -ее, -ие (ант. наибольший)	the least (ant. the greatest)
наименьшее общее кратное (НОК)	the least common multiple (L. C. M.)
НАЙДЕННЫЙ	found
найденное число	found number
НАЙТИ (см. находить)	
НАКЛАДЫВАТЬ, /, нес. в., что?, на что?, НАЛОЖИТЬ, //, сов. в.	to superimpose, to apply
накладывать один угол на другой	to apply one angle upon another
НАКЛОННАЯ, сущ.	inclined line
НАКЛОННЫЙ	oblique, inclined
наклонная линия	inclined line
наклонный конус	oblique cone
наклонный параллелепипед	oblique parallelepiped
наклонная плоскость	inclined plane
наклонная призма	oblique prism
наклонный цилиндр	oblique cylinder
НАКРЕСТ, нареч.	crosswise
накрест лежащие углы	alternate angles
НАЛОЖЕНИЕ, чего?, на что?	superposition
наложение одного отрезка на другой	superposition of one segment upon another
при наложении	by superposition, when superimposing

НАЛОЖИТЬ, (см, накладывать)	
НАНЕСЕНИЕ, чего?, на что?	plotting
нанесение точек на плоскость	plotting of points on the surface
НАНЕСТИ (см. наносить)	
НАНОСИТЬ, //, нес. в., что?, на что?, НАНЕСТИ, /, сов. в. (1 л. мн. ч. НАНЕСЁМ, прош. вр. НАНЁС, НАНЕСЛИ)	to mark, to plot
наносить деления на отрезок	to mark divisions on the segment
НАПРАВЛЕНИЕ	direction
направление в пространстве	direction in space
направление отсчёта	direction of reading
отрицательное направление	negative direction
положительное направление	positive direction
НАПРАВЛЕННЫЙ	directed
направленный отрезок	directed segment
НАПРАВЛЯЮЩАЯ, сущ.	guide, direction line (curve), directrix
направляющая конической поверхности	direction line (curve) of the conic surface, guide of the conic surface
НАРУШАТЬ, /, нес. в., что?, НАРУШИТЬ, //, сов. в.	to break
нарушать общность	to break community
нарушать равносильность	to break equivalence
НАРУШАТЬСЯ, /, нес. в., НАРУШИТЬСЯ, // сов. в.	to be disturbed, to be broken
равенство нарушится	equality will be disturbed
НАРУШИТЬ (см. нарушать)	
НАРУШИТЬСЯ (см. нарушаться)	
НАРЯДУ, с чем?	side by side, equally (to), together (with)
наряду с тем, что ...	side by side with that...
НАТУРАЛЬНЫЙ	natural
натуральная величина (размер)	natural size
натуральные логарифмы	natural logarithms
натуральный ряд чисел	natural series of numbers
натуральное число	natural number
НАТЯГИВАТЬ, /, нес. в., НАТЯНУТЬ, /, сов. в.	to stretch, to draw
натягивать нить	to stretch a thread
НАТЯНУТЬ (см. натягивать)	
НАХОДИТЬ, //. нес. в., что?, по чему?, НАЙТИ, /, сов. в. (1 л. мн. ч. НАЙДЕМ; прош. вр. НАШЁЛ, НАШЛИ)	to find
находить x по формуле	to find x by formula
1. НАХОДИТЬСЯ, //, нес. в., по чему?	to be found
уменьшаемое находится по разности и вычитаемому	minuend is found by difference and subtrahend
2. НАХОДИТЬСЯ, //, нес. в., в чем?, на чем?	to be
находиться в центре	to be in the centre
находиться на плоскости	to be on the plane

НАХОЖДЕНИЕ, чего?, по чему? (син. определение)	finding (syn. determination)
нахождение целого числа по части	finding of integer from it's part
НАЧАЛО	origin, beginning
начало координат	origin of coordinates
начало отсчёта	origin of reading
НАЧАЛЬНЫЙ (ант. конечный)	initial (ant. finite)
начальное положение	initial position
НАЧАТЬ (см. начинать)	
НАЧЕРТИТЬ (см. чертить)	
НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ	descriptive geometry
НАЧЕРЧЕННЫЙ	drawn
начерченная фигура	drawn figure
НАЧИНАТЬ, / нес. в., что?, с чего?, НАЧАТЬ, / сов. в: (1 л. мн. ч. НАЧНЕМ)	to begin
начинать решение с раскрытия скобок	to begin solving by opening the brackets
НАЧИСЛИТЬ (см, начислять)	
НАЧИСЛЯТЬ , /, нес. в., НАЧИСЛИТЬ, //, сов. в.	to set down, to put
начислять проценты	to set down percentage
НЕДОСТАТОК, род. п. ед. ч. НЕДОСТАТКА (ант. избыток)	deficiency, inadequacy, shortage (ant. surplus, excess)
откладываться с недостатком	to mark off with deficiency
НЕДОСТАЮЩИЙ	failing, missing
недостающий множитель	missing multiplier
НЕЗАВИСИМО, от чего?	independently
независимо от знака	independently of sign
НЕЗАВИСИМЫЙ, от чего?	independent
независимая величина	independent quantity
независимая переменная (син. аргумент)	independent variable (syn. argument)
величина, независимая от другой	quantity independent of another one
НЕИЗВЕСТНОЕ, сущ.	unknown (quantity)
вспомогательное неизвестное уравнение с двумя неизвестными	auxiliary unknown equation with two unknown (quantities)
НЕИЗВЕСТНЫЙ	unknown
неизвестная величина	unknown quantity
неизвестный член	unknown term
НЕИЗМЕННЫЙ	invariable
оставаться неизменным	to be invariable
НЕКОТОРЫЙ	some
некоторые значения x	some values of x
НЕОБХОДИМО	necessary
необходимо и достаточно	necessarily and sufficiently
НЕОБХОДИМЫЙ	necessary
необходимое условие	necessary condition
НЕОГРАНИЧЕННО, нареч.	unlimitedly
неограниченно возрастать	to increase unlimitedly
неограниченно приближаться	to approximate unlimitedly
НЕОГРАНИЧЕННЫЙ	unlimited, unbounded
неограниченная линия	unlimited line

неограниченное продолжение стороны	unlimited extension of side
НЕОПРЕДЕЛЕННО, нареч.	indefinitely
неопределённо большое количество	indefinitely large quantity
НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ	indefinite, indeterminate
неопределённый коэффициент	indefinite coefficient
НЕПОЛНЫЙ	incomplete
неполный квадрат разности (суммы)	incomplete square of difference (sum)
неполное квадратное уравнение	incomplete quadratic equation, pure quadratic equation
НЕПРАВИЛЬНО, нареч.	wrong
НЕПРАВИЛЬНЫЙ	improper
неправильная дробь	improper fraction
НЕПРЕРЫВНО, нареч.	unbrokenly, continuously
непрерывно возрастать	to increase continuously
НЕПРЕРЫВНЫЙ	continued, continuous
непрерывная пропорция	continued proportion
непрерывная функция	continuous function
НЕРАВЕНСТВО	inequality
неравенства одинакового смысла	inequalities of equal sense
неравенства противоположного смысла	inequalities of opposite sense
равносильные неравенства	equivalent inequalities
решение неравенств	solving of inequalities
свойства неравенств	properties laws of inequalities
условное неравенство	conditional inequality
НЕСОИЗМЕРИМЫЙ	incommensurable
несоизмеримые величины	incommensurable quantities
несоизмеримые отрезки	incommensurable segments
НЕСОКРАТИМЫЙ	irreducible
несократимая дробь	irreducible fraction
НЕЧЁТНЫЙ	odd
нечётная функция	odd function
нечётное число	odd number
НИЖНИЙ	lower
нижняя граница	lower bound
нижний предел	lower limit
НОЖКА	leg
ножка циркуля	compass leg
НОМЕР, род. п. ед. ч. НОМЕРА, им. п. мн. ч. НОМЕРА	number
порядковый номер	ordinal number, index number
НОРМАЛЬ, ж. р.	normal
НОРМАЛЬНЫЙ	normal, standard
нормальный вид	normal form, standard form
нормальное сечение	normal section
НУЖДАТЬСЯ, /. нес. в., в чем?	to need, to require
нуждаться в определении	to require definition
нуждаться в проверке	to require a verification (checking)
НУЖНЫЙ	necessary
нужный размер	necessary size

НУЛЕВОЙ	zero
нулевой показатель	zero exponent
нулевая степень	zero power (degree)
НУЛЬ, м. р.	nought, zero, cipher, null
НУМЕРАЦИЯ	numeration

О

ОБА, ж. р. обе	both
ОБВЕСТИ (см. обводить)	
ОБВОДИТЬ, //, нес. в., что?, чем?, ОБВЕСТИ, /, сов. в. (1 л. мн. ч. ОБВЕДЕМ; прош. вр. ОБВЁЛ, ОБВЕЛИ)	to outline
обводить чертёж тушью	to outline the draught with Indian ink
ОБЛАДАТЬ, /, нес. в., чем?	to possess
обладать свойством	to have a property, to possess a property
ОБЛАДАЮЩИЙ, -ая, -ее, -ие	possessing
точка, обладающая свойством	point possessing a property of...
ОБОЗНАЧАТЬ, /, нес. в., что?, чем?, ОБОЗНАЧИТЬ, //, сов. в.	to mark, to designate
обозначать угол буквой A	to mark an angle by letter A
здесь α обозначает угол...	here α marks an angle...
ОБОЗНАЧАЮЩИЙ, -ая, -ее, -ие	marking
буква A, обозначающая угол	letter A marking an angle
ОБОЗНАЧЕНИЕ	designation
обозначение функции	designation of function
ОБОЗНАЧИТЬ (см. обозначать)	
ОБОРОТ	revolution, rotation
полный оборот радиуса	the whole revolution of a radius
ОБРАЗОВАННЫЙ, чем?	formed
тело, образованное вращением плоской фигуры	solid, formed by rotation of a plane figure
угол, образованный двумя радиусами	angle, formed by two radii
ОБРАЗОВАТЬ, (см. образовывать)	
ОБРАЗОВЫВАТЬ, /, нес. в., что?, ОБРАЗОВАТЬ, /, сов. в. (1 л. мн. ч. ОБРАЗУЕМ)	to form
образовать тело путём вращения плоской фигуры	to form a solid by rotation of a plane figure
ОБРАЗУЮЩАЯ, сущ.	generatrix, generator
образующая конической поверхности	generatrix of a conic surface
образующая цилиндрической поверхности	generatrix of a cylindrical surface
ОБРАЗУЮЩИЙ, -ая, -ее, -ие	forming
отрезки, образующие угол	segments forming an angle
ОБРАТНО, нареч.	inversely, conversely, reciprocally
обратно пропорциональный	inversely proportional
ОБРАТНЫЙ, чему?	inverse, reciprocal, opposite
обратные величины	reciprocal quantities, reciprocals
обратное действие	inverse operation

обратная зависимость	inverse dependence
обратный знак	opposite sign
обратная пропорциональность	inverse proportionality
обратная теорема	converse theorem
обратные тригонометрические функции	inverse trigonometrical functions
обратная функция	inverse function
обратное число	inverse number
ОБРАТИТЬ (см. обращать)	
ОБРАЩАТЬ, /, нес. в., что?, во что? ОБРАТИТЬ, //, сов. в.	to transform, to invert, to convert
обращать смешанное число в неправильную дробь	to transform a mixed number into an improper fraction
ОБРАЩАТЬСЯ, /, нес. в., во что?, ОБРАТИТЬСЯ, //, сов. в.	to be transformed
обращаться в бесконечность	to become infinity
обращаться в нуль	to become zero
ОБРАЩЕНИЕ, чего?, во что?	inversion, conversion, transformation
обращение смешанного числа в неправильную дробь	inversion of a mixed number into an improper fraction
ОБЩИЙ, -ая, -ее, -ие	common, general
общий вид	general view
общий делитель	common divisor
общий знаменатель	common denominator
общая мера	common measure
общий множитель	common multiple
общий наибольший делитель (ОНД)	the greatest common divisor (G. C. D.)
общее наименьшее кратное (ОНК)	the least common multiple (L. C. M)
общее начало	general beginning
общая область неравенств	common sphere of inequalities
общее решение	general solution
общий случай	general case
общая сторона	common side
общие углы	common angles
общее правило	common rule
ОБЩНОСТЬ, ж. р.	community
без общности	without community
нарушать общность	to disturb (break) community
не нарушая общности	without disturbing (breaking) community
ОБЪЕМЛЕМЫЙ	inscribed
объемлемая ломаная	inscribed broken line
ОБЪЕМЛЮЩИЙ, -ая, -ее, -ие	circumscribed
объемлющая ломаная	circumscribed broken line
ОБЪЕМ	volume
объём тела	volume of a body
мера объёма	measure of volume
ОБЪЯСНЕНИЕ	explanation
давать объяснение	to give an explanation
ОБЪЯСНИТЬ (см. объяснять)	
ОБЪЯСНЯТЬ, /, нес. в., что?, ОБЪЯСНИТЬ, //, сов. в.	to explain

объяснять задачу	to explain a problem
ОБЪЯСНЯТЬСЯ, /, нес. в., чем? это объясняется тем, что…	to be explained it is explained by...
ОБЫКНОВЕННЫЙ	ordinary, common
обыкновенная дробь	vulgar (common) fraction
ОВЛАДЕВАТЬ, /, нес. в., чем?, ОВЛАДЕТЬ, /, сов. в.	to master, to become proficient in
овладевать счётом	to master count, to learn how to count
ОГРАНИЧЕННЫЙ, чем?	limited, bounded, finite, restricted
ограниченный сверху	bounded from above
ограниченный снизу	bounded from below
площадь, ограниченная ломаной	area bounded toy a broken line
ОГРАНИЧИВАТЬ, /, нес. в., что?, чем?, ОГРАНИЧИТЬ, //, сов. в.	to limit, to bound, to restrict
ограничивать площадь ломаной	to bound an area by a broken line
ОГРАНИЧИВАТЬСЯ, /, нес. в., чем?, ОГРАНИЧИТЬСЯ, //, сов. в.	to limit, to bound
ограничиваться простейшим случаем	to limit to the simplest case
ОГРАНИЧИТЬ (см. ограничивать)	
ОГРАНИЧИТЬСЯ (см. ограничиваться)	
ОДИНАКОВЫЙ	identical, equal
одинаковое расстояние	equal distance
неравенства одинакового смысла	inequalities of equal sense
ОДНОЗНАЧНЫЙ	simple, one-digit
однозначная функция	simple function
однозначное число	one-digit number
ОДНОИМЕННЫЙ	of the same name
одноимённые многоугольники	polygons of the same name
одноимённые фигуры	figures of the same name
ОДНОКРАТНЫЙ	once-through, one fold
ОДНОРОДНЫЙ	homogeneous
однородные величины	homogeneous quantities
однородные наименования чисел	homogeneous denominations of numbers
однородная система уравнений	homogeneous system of equations
ОДНОСТОРОННИЙ	one-sided, unilateral
односторонние углы	corresponding (one-sided) angles
ОДНОЧЛЕН	monomial
одночлены с одинаковыми основаниями	monomials with equal bases
целый одночлен	integral monomial
ОЗНАЧАТЬ, /, нес. в.	to mean, to stand for, to denote
знак x означает умножение	x denotes multiplication
ОКАЗАТЬСЯ (см. оказываться)	
ОКАЗЫВАТЬСЯ, /, нес. в., чем?, ОКАЗАТЬСЯ, /, сов. в. (3 л. ед. ч. ОКАЖЕТСЯ)	to turn out, to be found
оказывается возможным вынести за скобки множитель	it turns out possible to take the factor out of brackets
ОКАНЧИВАТЬСЯ, /, нес. в., чем?	to finish, to end, to be over, to terminate
оканчиваться нулями	to terminate in zeroes
ОКАНЧИВАЮЩИЙСЯ, -аяся, -ееся,	ending, terminating

-иеся, чем?	
число, оканчивающееся нулями	number terminating in zeroes
ОКОЛО (син. приблизительно)	round, about, approximately
ОКРУГЛЕНИЕ, чего?, до чего?	rounding-off, approximation
округление дроби до целого числа	approximation of a fraction to the whole number
ОКРУГЛИТЬ (см. округлять)	
ОКРУГЛЯТЬ, /, нес. в., что?, до чего?, ОКРУГЛИТЬ, //, сов. в.	to round off, to approximate
округлять дробь до целого числа	to approximate .a fraction to the whole number
ОКРУЖНОСТЬ, ж. р.	circle, circumference
вписанная окружность	inscribed circle
касающиеся окружности	touching circles
концентрические окружности	concentric circles
описанная окружность	circumscribed circle
эксцентрические окружности	eccentric circles
длина окружности	length of a circle, circumference of a circle
ОКТАЭДР (син. восьмигранник)	octahedron
ОПИРАТЬСЯ, /, нес. в., на что?	to rest (on); to lean (on), to base on
опираться на предыдущую теорему	to lean on the previous theorem
угол опирается на дугу	an angle rests on an arc
ОПИРАЮЩИЙСЯ, -аяся, -ееся, -иеся, на что?	resting
угол, опирающийся на дугу	angle resting on an arc
ОПИСАННЫЙ (ант. вписанный)	circumscribed (ant. inscribed)
описанный квадрат	circumscribed square
описанный многоугольник	circumscribed polygon
описанная окружность	circumscribed circle
описанный угол	circumscribed angle
описанный цилиндр	circumscribed cylinder
ОПИСАТЬ (см. описывать)	
ОПИСЫВАТЬ, /, нес. в., что?, чем?, около чего?, ОПИСАТЬ, /, сов. в.	to circumscribe
описывать четырехугольник около окружности	to circumscribe a quadrangle round the circle
ОПРЕДЕЛЕНИЕ	definition, determination
определение геометрических понятий	definition of geometrical concepts
определение логарифма	determination of logarithm
дать определение отрезка	to give definition of a segment
ОПРЕДЕЛЕНИЕ (син. нахождение)	determination (syn. finding)
определение величины отрезка	determination of a segment; finding the length of a segment
ОПРЕДЕЛЕННЫЙ	definite
определённый масштаб	definite scale
уравнение определённого типа	equation of definite type
ОПРЕДЕЛИТЬ (см. определять)	
ОПРЕДЕЛЯЕМЫЙ	defining
плоскость, определяемая тремя точками	plane described by three points
ОПРЕДЕЛЯТЬ, /, нес. в., что?, с	to define, to determine

помощью чего?, по чему?, ОПРЕДЕЛИТЬ, //, сов. в.	
определить длину отрезка с помощью циркуля	to determine (to find) the length of a segment with the help of compasses
определять площадь круга по формуле	to determine (to find) the area of a circle by formula
ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ, м. р.	determinant
ОПРЕДЕЛЯЮЩИЙ, -ая, -ее, -ие	determining
определяющий треугольник	determining triangle
1. ОПУСКАТЬ, /, нес. в., что?, из чего?, на что?, ОПУСТИТЬ, //, сов. в.	to drop
опускать наклонную из точки А на прямую ВС	to drop inclined line from A to line BC
опускать перпендикуляр	to drop a perpendicular
2. ОПУСКАТЬ, / нес. в., что? ОПУСТИТЬ, //, сов. в.	to omit
опустить знак и скобки	to omit a sign and brackets
ОПУСТИТЬ (см. опускать)	
ОПУЩЕННЫЙ	dropped
перпендикуляр, опущенный на прямую	perpendicular dropped on a straight line
ОРДИНАТА	ordinate
ордината комплексного числа	ordinate of a complex number
ось ординат	axis of ordinates
ОРТОГОНАЛЬНЫЙ	orthogonal
ортогональная проекция	orthogonal projection
ОРТОЦЕНТР	orthocentre
ОСВОБОДИТЬ (см. освобождать)	
ОСВОБОЖДАТЬ, /, нес. в., что?, от чего?, ОСВОБОДИТЬ, //, сов. в.	to spare (from), to release, to eliminate
освобождать выражение от иррациональности	to spare an expression from irrationality
ОСЕВОЙ	axial
осевая симметрия	axial symmetry
ОСНОВАНИЕ	base, foot
основание логарифма	base of a logarithm
основание одночлена	base of a monomial
основание перпендикуляра	base (foot) of a perpendicular
основание степени	base of a power
основание фигуры	base of a figure
ОСНОВАНИЕ	basis
на основании равенства степеней	on the basis of powers equality
на основании теоремы	on the basis of a theorem
на основании тождественных преобразований	on the basis of identical transformations
ОСНОВНОЙ	basis, fundamental
основная единица	fundamental unit
основное свойство дробей	basic property of fractions
ОСОБЫЙ	special
особый признак	special indication
особый случай	special case

требовать особого рассмотрения	to demand special consideration (examination)
ОСТАВИТЬ (см. оставлять)	
ОСТАВЛЯТЬ, /, нес. в., что?, ОСТАВИТЬ, //, сов. в.	to leave, to retain, to reserve
оставлять число без изменения	to retain a number without change
ОСТАЛЬНОЙ	the rest of
остальные числа	the rest of numbers
ОСТАТОК, род. п. ед. ч. ОСТАТКА, от чего?	remainder, residue
остаток от деления	remainder of division
делиться без остатка (с остатком)	to divide without a remainder (with a remainder)
ОСТРИЁ	point, spike
остриё карандаша	the point of a pencil
ОСТРОУГОЛЬНЫЙ	acute, acute angled
остроугольный треугольник	acute (-angled) triangle
ОСТРЫЙ (ант. тупой)	acute (ant. obtuse)
острый угол	acute angle
ОСЬ, ж. р., род. п. ед. ч. ОСИ, им. п. мн, ч. ОСИ	axis
ось абсцисс	axis of abscissa, axis of x, x-axis
ось вращения	axis of rotation
ось ординат	axis of ordinates, axis of y, (y-axis)
ось симметрии	axis of symmetry
вертикальная ось	vertical axis
горизонтальная ось	horizontal axis
числовая ось	numerical axis
ОТБРАСЫВАТЬ, /, нес. в., что?, ОТБРОСИТЬ, //, сов. в.	to take off, to drop
отбрасывать запятую в делителе	to take the decimal point off in divisor
ОТБРОСИТЬ (см. отбрасывать)	
ОТВЛЕЧЕННЫЙ	abstract
отвлечённое число	abstract number
ОТДЕЛИТЬ (см. отделять)	
ОТДЕЛЯТЬ, /, нес. в., что?, чем?, ОТДЕЛИТЬ, //, сов. в.	to separate
отделять знаки запятой справа налево	to separate digits (decimal places) with a comma from right to left
ОТКЛАДЫВАТЬ, /, нес. в., что?, на чем?, ОТЛОЖИТЬ, //, сов. в.	to mark off
откладывать отрезки на прямой	to mark off segments on a straight line
ОТКЛАДЫВАТЬСЯ, /, нес. в., ОТЛОЖИТЬСЯ, //, сов. в.	to mark off
откладываться с недостатком (с избытком)	to mark off with deficiency (with excess)
ОТЛИЧАТЬСЯ, /, нес. в., от чего? чем?	to differ from
одночлены отличаются друг от друга коэффициентами	monomials differ from each other in their coefficients
ОТЛИЧАЮЩИЙСЯ, -аяся, -ееся, -иеся,	differing

от чего?	
множитель, отличающийся от 2 и 5	the multiplier differing from 2 and 5
ОТЛИЧНЫЙ, от чего?	distinctive
отличный от нуля	distinctive from zero
отличный от предыдущего примера	distinctive from the previous example
ОТЛОЖЕННЫЙ	marked (off), cut
отрезок, отложенный на прямой	segment cut on a straight line
ОТЛОЖИТЬ (см. откладывать)	
ОТЛОЖИТЬСЯ (см. откладываться)	
ОТНИМАТЬ, /, нес. в., что?, от чего?, ОТНЯТЬ, /, сов. в. (1 л. мн. ч. ОТНИМЕМ)	to subtract
отнять три от пяти	to subtract three from five
ОТНОСИТЬСЯ, //, нес. в., к чему?	to be related
относиться между собой	to be related to one another
а относится к b, как с к d	a is to b as c is to d
ОТНОСИТЕЛЬНО, чего?	relatively
точка симметрии относительно оси	point of symmetry relatively to axis
ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ	relative
относительная погрешность	relative error
относительное число	relative number
ОТНОШЕНИЕ, чего?, к чему?	ratio
отношение двух чисел	ratio of two numbers
отношение длины окружности к диаметру	ratio of the length of a circle to the diameter
процентное отношение	percentage ratio
ОТРАЖЕНИЕ	reflection
отражение фигуры в зеркале	reflection of a figure on a mirror
ОТРЕЗОК, род. п. ед. ч. ОТРЕЗКА, им. п. мн. ч. ОТРЕЗКИ	segment (of a line)
замыкающий отрезок	closing segment
направленный отрезок	directed segment
несоизмеримые отрезки	incommensurable segments
отсекаемый отрезок	cutting segment
соизмеримые отрезки	commensurable segments
проекция отрезка	projection of a segment
ОТРИЦАТЕЛЬНЫЙ (ант. положительный)	negative (ant. positive)
отрицательная величина	negative quantity
отрицательное значение	negative value
отрицательное направление	negative direction
отрицательный показатель	negative exponent
отрицательная степень	negative power
отрицательное число	negative number
ОТСЕКАТЬ, /, нес. в., что?, чем?, ОТСЕЧЬ, /, сов. в. (1 л. мн. ч. ОТСЕЧЁМ; прош. вр. ОТСЁК, ОТСЕКЛИ)	to cut off, to chop off
отсекать часть фигуры плоскостью	to cut a part of a figure by a plane
ОТСЕКАЕМЫЙ	to be cut

отсекаемый отрезок	cutting segment
ОТСЕЧЬ (см. отсекать)	
ОТСЧЁТ	reading
начало отсчёта	origin of reading
ОТСТОЯТЬ, //, нес. в., от чего?	to be distant (from), to be away
отстоять от концов прогрессии	to be distant from the ends of progression
ОТСТОЯЩИЙ, -ая, -ее, -ие	being away
члены, одинаково отстоящие от концов прогрессии	the terms being equidistant from the ends of progression
ОТСУТСТВОВАТЬ, /, нес. в. (3 л. ед. ч. ОТСУТСТВУЕТ)	to be absent
член уравнения отсутствует	a term of an equation is absent
ОЧЕВИДНЫЙ	obvious
очевидное равенство	obvious equality
очевидное свойство	obvious property
ОШИБКА, род. п., мн. ч. ОШИБОК	error, mistake
абсолютная ошибка	absolute error
вероятная ошибка	probable error
средняя ошибка	mean error

П

ПАДАТЬ, /, нес. в., во что?, на что?, УПАСТЬ, /, сов. в. (3 л. ед. ч. УПАДЕТ, прош. вр. УПАЛ)	to fall, to drop
падать в центр основания	to drop to the centre of the base
ПАРА	pair, couple
ПАРАБОЛА	parabola
ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД	parallelepiped
наклонный параллелепипед	oblique parallelepiped
прямой параллелепипед	right parallelepiped
прямоугольный параллелепипед	rectangular parallelepiped
ПАРАЛЛЕЛОГРАММ	parallelogram
высота параллелограмма	altitude of a parallelogram
основание параллелограмма	base of a parallelogram
площадь параллелограмма	area of a parallelogram
построение параллелограмма	construction of a parallelogram
ПАРАЛЛЕЛЬ, ж. р.	parallel
ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ, ж. р.	parallelism
параллельность плоскости и прямой	parallelism of a plane and a straight line
ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ	parallel
параллельные плоскости	parallel planes
параллельные прямые	parallel lines
параллельные сечения	parallel sections
ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЙ	original, primary, initial
восстановить первоначальное выражение	to restore the initial (primary) expression
ПЕРЕВЕСТИ (см. переводить)	
ПЕРЕВОДИТЬ, //, нес. в. что?, во что?, ПЕРЕВЕСТИ, /, сов. в. (1 л. мн. ч. ПЕРЕВЕДЕМ; прош. вр. ПЕРЕВЕЛ)	to convert

переводить периодическую дробь в обыкновенную	to convert recurrent decimal into common fraction
ПЕРЕГИБАТЬ, / , нес. в., что? ПЕРЕГНУТЬ, /, сов. в.	to bend
перегибать чертёж пополам	to bend a draught in two (parts), to fold a draught into two equal parts
ПЕРЕГНУТЬ (см. перегибать)	
ПЕРЕДВИЖНОЙ	mobile
передвижной винт	mobile screw
ПЕРЕМЕНА	change
перемена мест	change of places
ПЕРЕМЕННАЯ, сущ.	variable (quantity)
зависимая переменная	dependent variable
независимая переменная (син. аргумент)	independent variable (syn. argument)
ПЕРЕМЕННЫЙ	variable
переменная величина	variable quantity
ПЕРЕМЕСТИТЕЛЬНЫЙ ЗАКОН	commutative law
ПЕРЕМЕСТИТЬ (см. перемещать)	
ПЕРЕМЕЩАТЬ, /, нес. в., что?, по чему?, до чего?, ПЕРЕМЕСТИТЬ, //, сов. в.	to move, to transfer
перемещать точку В по окружности до совпадения с точкой А	to transfer point B along the circle so as to coincide with point A
ПЕРЕМЕЩЕНИЯ	displacements
возможные перемещения	possible displacements
число перемещений	number of displacements
ПЕРЕМНОЖАТЬ, /, нес. в., что?, ПЕРЕМНОЖИТЬ, //, сов. в.	to multiply
перемножать два члена	to multiply two terms
ПЕРЕНЕСТИ (см. переносить)	
ПЕРЕНОСИТЬ, //, нес. в., что?, откуда?, куда?, ПЕРЕНЕСТИ, /, сов. в. (1 л. мн. ч. ПЕРЕНЕСЁМ; прош. в. ПЕРЕНЕС, ПЕРЕНЕСЛИ)	to transpose, to transfer, to shift
переносить запятую влево	to transfer the decimal comma to the left
переносить начало отсчёта из точки А в точку В	to transfer the origin of reading from A to B
переносить члены уравнения из правой части в левую	to transfer the terms of an equation from the right side to the left one
ПЕРЕПИСАТЬ (см переписывать)	
ПЕРЕПИСЫВАТЬ, /, нес. в., что?, ПЕРЕПИСАТЬ, / сов. в. (1 л. мн. ч. ПЕРЕПИШЕМ)	to re-copy
переписывать уравнение	to re-write an equation
ПЕРЕСЕКАТЬ, /, нес. в., что?, в чем?, ПЕРЕСЕЧЬ, /, сов. в. (1 л. мн. ч. ПЕРЕСЕЧЁМ; прош. вр. ПЕРЕСЁК, ПЕРЕСЕКЛИ)	to cut, to intersect, to cross
пересекать прямую в точке А	to cut a straight line at point A
ПЕРЕСЕКАТЬСЯ, /, нес. в., с чем?, в	to cut, to intersect

чем?, ПЕРЕСЕЧЬСЯ, /, сов. в. (3 л. ед. ч. ПЕРЕСЕЧЁТСЯ, 3 л. мн. ч. ПЕРЕСЕКУТСЯ; прош. вр. ПЕРЕСЁКСЯ, ПЕРЕСЕКЛИСЬ)	
пересекаться с прямой АВ в точке D	to cross straight line AB at point D
ПЕРЕСЕКАЮЩИЙСЯ, -аяся, -ееся, -иеся	intersecting, crossing
пересекающиеся плоскости	intersecting planes
пересекающиеся прямые	intersecting straight lines
ПЕРЕСЕЧЕНИЕ	intersection
ПЕРЕСЕЧЕННЫЙ, чем?	cut
конус, пересечённый плоскостью	cone cut by a plane
ПЕРЕСЕЧЬ (см. пересекать)	
ПЕРЕСЕЧЬСЯ (см. пересекаться)	
ПЕРЕСТАВИТЬ (см. переставлять)	
ПЕРЕСТАВЛЯТЬ, /, нес. в., что?, ПЕРЕСТАВИТЬ, //, сов. в.	to move, to shift, to interchange, to transpose, to permute
переставлять средние члены пропорции	to interchange means of proportion
ПЕРЕСТАНОВКА, род. п. мн. ч. ПЕРЕСТАНОВОК	permutation
число перестановок	number of permutations
ПЕРИМЕТР	perimeter
ПЕРИОД	period
период дроби	period of a fraction, repeating decimal
исключать период	to eliminate a period
ПЕРИОДИЧЕСКИЙ, -ая, -ое, -ие	periodic
периодическая дробь	recurrent fraction (decimal), periodic fraction
периодическая функция	periodic function
смешанная периодическая дробь	mixed recurrent decimal
чистая периодическая дробь	pure recurrent decimal
ПЕРИОДИЧНОСТЬ, ж. р.	periodicity
ПЕРПЕНДИКУЛЯР	perpendicular
перпендикуляр к плоскости	perpendicular to a plane
перпендикуляр к прямой	perpendicular to a straight line
восставлять перпендикуляр	to erect a perpendicular
опускать перпендикуляр	to drop a perpendicular
построение перпендикуляра	construction of a perpendicular
ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО, чему? (к чему?)	perpendicularly
перпендикулярно прямой (к прямой)	perpendicularly to a straight line
ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ, ж. р.	perpendicularity
перпендикулярность прямой и плоскости	perpendicularity of a straight line and a plane
ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЙ	perpendicular
перпендикулярные плоскости	perpendicular planes
перпендикулярное сечение	perpendicular section
взаимно перпендикулярные прямые	mutually perpendicular straight lines
ПЕРСПЕКТИВА	perspective
ПЕРСПЕКТИВНЫЙ	perspective
перспективно-подобное преобразование	perspective and similar transformation

Пи (π) (отношение длины окружности к диаметру	Pi (π) (ratio of circumference to the diameter)
ПИРАМИДА	pyramid
многоугольная пирамида	polyhedral pyramid
правильная пирамида	regular pyramid
треугольная пирамида	triangular pyramid
трехгранная пирамида	trihedral pyramid
усечённая пирамида	truncated pyramid
апофема пирамиды	apothem of a pyramid
высота пирамиды	altitude of a pyramid
основание пирамиды	base of a pyramid
ПИФАГОР	Pythagoras
теорема Пифагора	theorem of Pythagoras
числа Пифагора	Pythagorean numbers
ПЛАВНЫЙ	smooth
плавная линия	smooth line
ПЛАНИМЕТРИЯ	planimetry, plane geometry
ПЛОСКИЙ, -ая, -ое, -ие	flat, plane
плоская поверхность	plane surface, plane
плоский угол	plane angle
плоская фигура	plane figure
ПЛОСКОСТЬ, ж. р.	plane
плоскость симметрии	plane of symmetry
горизонтальная плоскость	horizontal plane
диагональная плоскость	diagonal plane
диаметральная плоскость	diametrical plane
касательная плоскость	tangent plane
координатная плоскость	coordinate plane
наклонная плоскость	inclined plane
параллельные плоскости	parallel planes
пересекающиеся плоскости	intersecting planes
перпендикулярная плоскость	perpendicular plane
секущая плоскость	secant plane
соприкасающиеся плоскости	contacted planes
ПЛОЩАДЬ, ж. р.	area
площадь круга	area of a circle
площадь многоугольника	area of polygon
площадь параллелограмма	area of parallelogram
площадь поверхности	area of surface
площадь сегмента	area of segment
площадь треугольника	area of triangle
ПЛЮС (ант. минус)	plus (ant. minus)
ПОВЕРНУТЬ (см. поворачивать)	
ПОВЕРХНОСТЬ	surface
поверхность вращения	surface of rotation
поверхность тела	surface of a solid
боковая поверхность	lateral surface
коническая поверхность	conic surface
кривая поверхность	curve surface
плоская поверхность	plane surface

сферическая поверхность	spherical surface
цилиндрическая поверхность	cylindrical surface
площадь поверхности	area of a surface
ПОВОРАЧИВАТЬ, /, нес. в., что? вокруг чего?, около чего?, ПОВЕРНУТЬ, /, сов. в.	to turn
поворачивать фигуру вокруг оси на 360°	to turn a figure round the axis by 360°
поворачивать луч около начала О	to turn a ray round the origin 0
ПОВОРОТ, чего?, вокруг чего?	turning
поворот фигуры вокруг оси	turning of a figure round the axis
угол поворота	angle of turn, angle of rotation
ПОВТОРЕНИЕ, чего?, чем?	repetition, reiteration
повторение числа сомножителем n раз	reiteration of a number as a factor n times
ПОВТОРЯТЬ, /, нес. в., что?, чем?, ПОВТОРИТЬ, //, сов. в.	to reiterate, to repeat
повторять число сомножителем n раз	to reiterate a number as a factor n times
ПОВТОРЯЮЩИЙСЯ, -аяся, -ееся, -иеся	repeating
повторяющийся десятичный знак	repeating decimal sign
ПОВЫСИТЬ (см. повышать)	
ПОВЫШАТЬ, /, нес. в., что?, ПОВЫСИТЬ, //, сов. в. (ант. понижать)	to raise, to heighten, to increase (ant. to lower)
повышать степень уравнения	to raise a power of an equation
ПОГРЕШНОСТЬ, ж. р.	error
погрешность произведения и частного	error of product and quotient
погрешность суммы и разности	error of sum and difference
абсолютная погрешность	absolute error
относительная погрешность	relative error
ПОДБИРАТЬ, /, нес. в., что?, ПОДОБРАТЬ, /, сов. в. (1 л. мн. ч. ПОДБЕРЁМ)	to sort out, to select, to choose
подбирать нужное число	to choose the necessary number
ПОДВИЖНЫЙ	mobile, movable
подвижный винт циркуля	mobile compasses screw
подвижный радиус	movable radius
ПОДКОРЕННОЙ	radicand
подкоренное выражение	radicand expression
подкоренное число	radicand number
ПОДОБИЕ	similarity, similitude
подобие треугольников	similarity of triangles
центр подобия	centre of similitude
ПОДОБНО, чему?	similarly (to)
подобно предыдущему	similarly to the foregoing (preceding)
подобно расположенный	similarly disposed
ПОДОБНЫЙ	similar
подобное преобразование	similar transformation
подобные фигуры	similar figures
подобные члены	similar terms, like terms
ПОДОБРАТЬ (см. подбирать)	
ПОДРАЗДЕЛИТЬ (см. подразделять)	

ПОДРАЗДЕЛЯТЬ, /, нес. в., что?, на что?, ПОДРАЗДЕЛИТЬ, //, сов. в.	to subdivide
подразделять неравенства по старшим степеням неизвестных	to subdivide inequalities in accordance with greatest powers of unknown quantities
ПОДРАЗУМЕВАТЬ, /, нес. в., что?, под чем? (син. понимать, считать)	to imply (syn. to mean, to consider)
под x подразумеваем целое число	we mean x as a whole number
ПОДРОБНО	in detail
ПОДСТАВИТЬ (см. подставлять)	
ПОДСТАВЛЯТЬ, /, нес. в., что?, во что?, вместо чего?, ПОДСТАВИТЬ, //, сов. в.	to substitute (for)
подставлять значение x в уравнение	to put the value of x into an equation
подставить вместо x его числовое значение	to put a numerical value instead of x
ПОДСТАВЛЕННЫЙ	substituted
подставленное число	substituted number
ПОДСТАНОВКА, род. п. мн. ч. ПОДСТАНОВОК, чего?, во что?	substitution
подстановка в равенство числовых значений	substitution of numerical values to an equality
решать систему уравнений способом подстановки	to solve a system of equations by method of substitution
ПОДХОДЯЩИЙ, -ая, -ее, -ие	suitable, appropriate
подходящее значение x	suitable meaning of x
ПОДЧИНИТЬСЯ (см. подчиняться)	
ПОДЧИНЯТЬСЯ, /, нес. в., чему?, ПОДЧИНИТЬСЯ, //, сов. в.	to submit, to be governed
подчиняться правилу	to be governed by the rule, to submit to the rule
ПОЗВОЛИТЬ (см. позволять)	
ПОЗВОЛЯТЬ, /, нес. в., ПОЗВОЛИТЬ, //, сов. в.	to allow
позволять вычислить	to allow to calculate
позволять упростить	to allow to simplify
ПОЙТИ, /, сов. в., по чему? (3 л. ед. ч. ПОЙДЁТ; прош. вр. ПОШЕЛ, ПОШЛИ)	to go
сторона AB пойдёт по стороне A′B′	side AB goes along side A'B'
ПОКАЗАТЕЛЬ, м. р.	exponent, index
показатель корня	index of a radical, root index
показатель степени	exponent of a power, index of a power
дробный показатель	fractional exponent
нулевой показатель	zero exponent
отрицательный показатель	negative exponent
ПОКАЗАТЕЛЬНЫЙ	exponential
показательное уравнение	exponential equation
показательная функция	exponential function
ПОКАЗАТЬ (см. показывать)	
ПОКАЗЫВАТЬ, /, нес. в., что?, ПОКАЗАТЬ, /, сов .в. (1 л. мн. ч. ПОКАЖЕМ	to show

ПОЛАГАТЬ, /, нес. в., ПОЛОЖИТЬ //, сов. в.	to suppose
положим, что a=b	let's suppose that a = b
ПОЛИНОМ (син. многочлен)	polynom, polynomial
ПОЛНЫЙ	complete, absolute, total full
полное квадратное уравнение	complete square equation
полный угол	full angle
ПОЛОВИНА	half
ПОЛОЖЕНИЕ, чего?, в чем?	position
положение тела в пространстве	position of a body in space
исходное положение	initial position, point of departure
конечное положение	finite position
начальное положение	initial position
ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЙ (ант. отрицательный)	positive (ant. negative)
положительная бесконечность	positive infinity
положительная величина	positive quantity
положительное значение	positive value
положительное направление	positive direction
положительная степень	positive power
положительное число	positive number
ПОЛОЖИТЬ (см. полагать)	
ПОЛУКРУГ	semicircle
ПОЛУОКРУЖНОСТЬ, ж. р.	semicircumference
ПОЛУОСЬ, ж. р.	half-axis
ПОЛУПЕРИОД	half-cycle
ПОЛУПЛОСКОСТЬ, ж. р.	half-plane
ПОЛУПРЯМАЯ, сущ. (син. луч)	straight semiline (section of a straight line ending in a point at one end and infinity at the other end) (syn. ray)
ПОЛУРАЗНОСТЬ, ж. р.	semi-difference
ПОЛУСУММА	half-sum
ПОЛУЧАТЬ, /, нес. в., что?, ПОЛУЧИТЬ, //, сов. в.	to obtain, to get
получать результат	to get result
ПОЛУЧАТЬСЯ, /, нес. в., ПОЛУЧИТЬСЯ, //, сов. в.	to turn out, to be
три плюс два получиться пять	three plus two is five
ПОЛУЧЕННЫЙ	obtained
полученный результат	obtained result
полученное число	obtained number
ПОЛУЧИТЬ (см. получать)	
ПОЛУЧИТЬСЯ (см. получаться)	
ПОЛЬЗОВАТЬСЯ, /, нес. в., чем? 1 л. мн. ч. ПОЛЬЗУЕМСЯ), ВОСПОЛЬЗОВАТЬСЯ, /, сов. в.	to make use
пользоваться указанным способом	to make use of the given way (method)
ПОМЕНЯТЬ (см. менять)	
ПОНАДОБИТЬСЯ, //, только сов в.	to need
ПОНИЖАТЬ, /, нес. в., что?,	to lower (ant. to raise, to heighten, to

ПОНИЗИТЬ, //, сов. в. (ант. повышать)	increase)
понижать степень уравнения	to lower the power of an equation
ПОНИЗИТЬ (см. понижать)	
ПОНИМАТЬ, /, нес. в., что?, под чем? (син. подразумевать, считать)	to mean (syn. to imply, to; consider)
ПОНЯТИЕ, о чем?	concept
понятие о логарифме	concept of logarithm
ПООЧЕРЁДНО, нареч.	in turn
ПОПАРНО, нареч.	in pairs
попарно равные отрезки	segments equal in pairs, pairs of equal segments
ПОПЕРЁК	across
ПОПЕРЕЧНЫЙ	diametrical, cross
поперечный масштаб	cross-scale
поперечное сечение	cross section
ПОПОЛАМ, нареч.	in halves, in two, half and half
делить пополам	to divide in two, to halve
перегибать пополам	to fold in two
ПОРОЗНЬ, нареч.	separately, apart
если a и b порознь равны c, то и a = b	if a and b separately are equal to c, then a equals to b
ПОРЯДКОВЫЙ	ordinal
порядковое числительное	ordinal number
порядковый номер	ordinal number, index number
ПОРЯДОК, род. п. ед. н. ПОРЯДКА	order
порядок действий	order of operations
порядок членов	order of terms
ПОСЛЕДНИЙ	last
последний пример	the last example
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ, ж. р.	succession, sequence
монотонно-возрастающая последовательность	monotonically increasing sequence
числовая последовательность	numerical succession
ПОСЛЕДУЮЩИЙ, -ая, -ее, -ие (ант. предыдущий)	following (ant. previous, foregoing, preceding)
последующий член пропорции	following term of a proportion
поскольку..., постольку...	so far as
посредине	in the middle
ПОСТАВИТЬ (см. ставить)	
ПОСТЕПЕННО, нареч.	gradually, little by little
постепенно возрастать	to increase gradually
ПОСТОРОННИЙ	extraneous
посторонний корень	extraneous root
постороннее решение	extraneous solution
ПОСТОЯННЫЙ	constant
постоянная величина	constant quantity
ПОСТРОЕНИЕ	construction
построение геометрической фигуры	construction of a geometrical figure
ПОСТРОИТЬ (см. строить)	
ПОСТУЛАТ	postulate

ПОТРЕБОВАТЬ (см. требовать)	
ПОЧЛЕННО, нареч.	termwise
сложить равенства почленно	to add equalities termwise
ПОЯС	belt, zone
сферический пояс	spherical belt (zone)
шаровой пояс	spherical belt (zone)
ПОЯСНИТЬ (см. пояснять)	
ПОЯСНЯТЬ, /, нес. в., что?, чем?, ПОЯСНИТЬ, //, сов. в.	to explain
пояснять высказанную мысль примером	to illustrate the idea by an example
ПРАВИЛО	rule
правило знаков	the rule for signs
ПРАВИЛЬНЫЙ	right, true, regular, proper
правильная дробь	proper fraction
правильный многогранник	regular polyhedron
правильный многоугольник	regular polygon
правильная пирамида	regular pyramid
правильная призма	regular prism
ПРЕВЗОЙТИ (см. превосходить)	
ПРЕВОСХОДИТЬ, //, нес. в., что?, ПРЕВЗОЙТИ, /, сов. в. (3 л. ед. н. ПРЕВЗОЙДЁТ; прош. вр. ПРЕВЗОШЁЛ, ПРЕВЗОШЛИ)	to exceed, to excel
а превосходит единицу	a exceeds unity
ПРЕВРАТИТЬ (см. превращать)	
ПРЕВРАЩАТЬ, /, нес. в., что?, во что?, ПРЕВРАТИТЬ, //, сов. в.	to turn (into), to convert
превращать градусы в минуты	to convert degrees into minutes
ПРЕВЫСИТЬ (см. превышать)	
ПРЕВЫШАТЬ, /, нес. в., что?, ПРЕВЫСИТЬ, //, сов. в.	to exceed
а превышает единицу	a exceeds unity
ПРЕДВАРИТЕЛЬНО	preliminarily, beforehand
ПРЕДЕЛ (син. лимит)	limit
верхний предел	upper limit
нижний предел	lower limit
ПРЕДЕЛЬНЫЙ	extreme, over-all, ultimate
предельная абсолютная погрешность	extreme absolute error
ПРЕДМЕТ	object
ПРЕДПОЛАГАТЬ, /, нес. в., ПРЕДПОЛОЖИТЬ, //, сов. в.	to suppose, to assume, to presume
предположим, что a = b	let's suppose that a = b
ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ	supposition, assumption
делать предположение	to suppose
ПРЕДПОЛОЖИТЬ (см. предполагать)	
ПРЕДСТАВИТЬ (см. представлять)	
ПРЕДСТАВЛЕНИЕ, о чем?	idea, notion
иметь представление о пределах	to have an idea about limits
приобретать представление	to acquire an idea
ПРЕДСТАВЛЯТЬ, /, нес. в., что?, в виде	to express

чего?, чем?, ПРЕДСТАВИТЬ, //, сов. в.	
представлять зависимость в виде уравнения	to express the dependence in the form of an equation
ПРЕДЫДУЩИЙ, -ая, -ее, -ие (ант. последующий)	previous, foregoing, preceding (ant. following)
предыдущий член пропорции	preceding term of a proportion
ПРЕЖНИЙ	previous
прежние знаки	previous signs
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ	transformation
преобразование пропорции	transformation of a proportion
тождественные преобразования	identical transformation
делать преобразование	to transform
ПРЕОБРАЗОВАТЬ (см. преобразовывать)	
ПРЕОБРАЗОВЫВАТЬ, /, нес. в., что?, ПРЕОБРАЗОВАТЬ, /, сов. в.	to transform
преобразовать пропорцию	to transform a proportion
ПРЕОБРАЗОВЫВАТЬСЯ, /, нес. в., во что?, ПРЕОБРАЗОВАТЬСЯ, /, сов. в.	to be transformed
ПРИБАВИТЬ (см. прибавлять)	
ПРИБАВЛЕНИЕ	addition
ПРИБАВЛЯЕМЫЙ	additional
прибавляемое число	additional number
ПРИБАВЛЯТЬ, /, нес. в., что?, к чему?, ПРИБАВИТЬ, //, сов. в.	to add
к двум прибавить пять	to add five to two
ПРИБЛИЖЁННЫЙ	approximate
приближённая величина	approximate value
приближённое вычисление	approximate calculation
приближённое значение	approximate value
приближённое частное	approximate quotient
приближённое число	approximate number
ПРИБЛИЗИТЕЛЬНО, нареч. (син. примерно)	approximately
ПРИБЛИЗИТЕЛЬНЫЙ (син. примерный)	approximate
ПРИВЕДЕНИЕ	reduction
приведение к виду, удобному для логарифмирования	reduction to a form convenient for finding a logarithm
приведение к общему знаменателю	reduction to a common denominator
приведение подобных членов	reduction of similar terms
формулы приведения	reduction formulas
ПРИВЕДЁННЫЙ	reduced
приведённое квадратное уравнение	reduced square equation
приведённый многочлен	reduced polynomial
ПРИВЕСТИ (см. приводить)	
ПРИВОДИТЬ, //, нес. в., что?, к чему?, ПРИВЕСТИ, /, сов. в. (1 л. мн. ч. ПРИВЕДЁМ; прош. вр. ПРИВЁЛ, ПРИВЕЛИ)	to reduce

приводить выражение к виду, удобному для логарифмирования	to reduce an expression to a form convenient for finding a logarithm
приводить дроби к общему знаменателю	to reduce fractions to a common denominator
приводить к простейшему виду	to reduce to the simplest form
ПРИЕМ (син. способ)	method, way, mode
ПРИЗМА	prism
наклонная призма	inclined prism
правильная призма	regular prism
прямая призма	right prism
трехгранная призма	triangular prism
ПРИЗНАК	sign, indication, criteria
признаки делимости	signs of divisibility, criteria lor divisibility
признаки равенства треугольников	indications of equality of triangles
ПРИЙТИСЬ (см. приходиться)	
ПРИКЛАДЫВАТЬ, /, нес. в., что?, к чему?, ПРИЛОЖИТЬ, //, сов. в.	to apply
прикладывать один треугольник к другому	to apply one triangle to another
ПРИЛЕГАЮЩИЙ, -ая, -ее, -ие	adjacent
прилегающие углы	adjacent angles
ПРИЛЕЖАТЬ, //, только нес. в., к чему?	to adjoin
угол прилежит к стороне	an angle adjoins to a side
ПРИЛЕЖАЩИЙ, -ая, -ее, -ие	adjacent
прилежащая сторона	adjacent side
прилежащий угол	adjacent angle
угол, прилежащий к стороне	angle adjacent to a side
ПРИЛОЖИТЬ (см. прикладывать)	
ПРИМЕНЕНИЕ	application
ПРИМЕНИТЬ (см. применять)	
ПРИМЕНЯТЬ, /, нес. в., что?, ПРИМЕНИТЬ, //, сов. в.	to use, to employ
применять свойства пропорции	to use the properties of a proportion
применять теорему	to use a theorem
ПРИМЕР	example
аналогичный пример	analogical example
ПРИМЕРНО (син. приблизительно)	approximately
ПРИМЕРНЫЙ (син. приблизительный)	approximate
примерное решение	approximate solution
ПРИМЕЧАНИЕ	note
ПРИНАДЛЕЖАТЬ, //, только нес. в., чему?	to belong
точка принадлежит прямой	a point belongs to the straight line
ПРИНИМАТЬ, /, нес. в., что?, за что?, ПРИНЯТЬ, /, сов. в. (1 л. м. ч. ПРИМЕМ)	to assume
принимать вид	to take shape (form)
принимать x за единицу	to assume x for unity
принимать следующий порядок действий	to assume the following order of operations
ПРИОБРЕСТИ (см. приобретать)	

ПРИОБРЕТАТЬ, /, нес. в., что?, ПРИОБРЕСТИ, /, сов. в. (3 л. ед. ч. ПРИОБРЕТЁТ; прош. вр. ПРИОБРЁЛ, ПРИОБРЕЛИ)	to obtain, to acquire, to assume, to gain
приобретать новый корень	to acquire a new root
ПРИПИСАТЬ (см. приписывать)	
ПРИПИСЫВАНИЕ	addition
приписывание нулей справа десятичной дроби	addition of zeroes to the right of a decimal fraction
ПРИПИСЫВАТЬ, /, нес. в. что?, к чему?, ПРИПИСАТЬ, /, сов. в. (1 л. мн. ч., ПРИПИШЕМ)	to add, to attach, to ascribe
приписывать x к обеим частям уравнения	to add x to both parts of the equation
ПРИРАВНИВАТЬ, /, нес. в., что?, к чему?, ПРИРАВНЯТЬ, /, сов. в.	to equate
приравнивать выражение к нулю	to equate an expression to zero
ПРИХОДИТЬСЯ, //, нес. в. на что?, ПРИЙТИСЬ, /, сов. в. (3 л. ед. ч. ПРИДЁТСЯ; прош. вр. ПРИШЛОСЬ)	to fall on
сколько рублей приходится на одну часть?	how many roubles fall on one part?
ПРОАНАЛИЗИРОВАТЬ (см. анализировать)	
ПРОВЕДЁННЫЙ, из чего?, к чему?	drawn
перпендикуляр, проведённый из точки A к прямой BC	the perpendicular drawn from A to straight line BC
ПРОВЕРКА	check-up, verification
делать проверку	to check up
ПРОВЕРИТЬ (см. проверять)	
ПРОВЕРЯТЬ, /, нес. в., что?, ПРОВЕРИТЬ, //, сов. в.	to check
проверять решение	to check up a solution
ПРОВЕСТИ (см. проводить)	
ПРОВОДИТЬ, //, нес. в., что?, к чему?, из чего?, ПРОВЕСТИ, /, сов. в. (1 л. мн. ч. ПРОВЕДЁМ; прош. вр. ПРОВЁЛ, ПРОВЕЛИ)	to draw
проводить перпендикуляр из точки C к прямой AB	to draw the perpendicular from point C to straight line AB
проводить прямую на доске	to draw a straight line on the black board
ПРОГРЕССИЯ	progression
арифметическая прогрессия	arithmetical progression
бесконечная прогрессия	infinite progression
возрастающая прогрессия	increasing progression
геометрическая прогрессия	geometrical progression
убывающая прогрессия	decreasing progression
ПРОДОЛЖАТЬ, /, нес. в., что?, до чего?, ПРОДОЛЖИТЬ, //, сов. в.	to continue
продолжать отрезок до пересечения с	to continue a segment till it crosses a

прямой	straight line
ПРОДОЛЖЕНИЕ	extension
ПРОДОЛЖИТЬ (см. продолжать)	
ПРОЕКТИРОВАНИЕ	planning, projection
параллельное проектирование	parallel projection
ПРОЕКТИРОВАТЬ, /, нес. в., что?, на что?, СПРОЕКТИРОВАТЬ, /, сов. в.	to project, to plan
проектировать отрезок на плоскость	to project a segment to a plane
ПРОЕКЦИЯ, чего?, на что?	projection
проекция отрезка на плоскость	projection of a segment on a plane
проекция точки	projection of a point
проекция фигуры	projection of a figure
ортогональная проекция	orthogonal projection
ось проекции	axis of a projection
ПРОИЗВЕДЕНИЕ, чего?, на что?	product
произведение первого числа на второе	product of the first number by the second
ПРОИЗВЕСТИ (см. производить)	
ПРОИЗВОДИТЬ, //, нес. в., что?, ПРОИЗВЕСТИ, /, сов. в. (1 л.мн. ч. ПРОИЗВЕДЁМ; прош. вр. ПРОИЗВЁЛ, ПРОИЗВЕЛИ) (син. выполнять, делать)	to carry out, to produce (syn. to do, to make)
производить вычисления	to make calculation
ПРОИЗВОДНЫЙ	derivative
производная величина	derivative quantity
производная пропорция	derivative proportion
ПРОИЗВОЛЬНО, нареч.	at will, arbitrarily
произвольно взятый	taken at will
ПРОИЗВОЛЬНЫЙ	arbitrary
произвольная прямая	arbitrary straight line
произвольный угол	arbitrary angle
ПРОИЛЛЮСТРИРОВАТЬ (см. иллюстрировать)	
ПРОЛОГАРИФМИРОВАТЬ (см. логарифмировать)	
ПРОМЕЖУТОК, род. п. ед. ч. ПРОМЕЖУТКА	interval
промежуток между отрезками	interval between segments
ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ, ж. р.	proportionality
обратная пропорциональность	inverse proportionality
прямая пропорциональность	direct proportionality
ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЙ	proportional
пропорциональные величины	proportional quantities
пропорциональный циркуль	proportional compasses
пропорциональные числа	proportional numbers
среднее пропорциональное, сущ.	the mean proportional
ПРОПОРЦИЯ	proportion
арифметическая пропорция	arithmetic (al) proportion
непрерывная пропорция	continued proportion
ПРОСТЕЙШИЙ, -ая, -ее, -ие	the simplest

простейшие понятие	the simplest notion (concept)
простейший случай	the simplest case
ПРОСТОЙ	simple
простая дробь	simple fraction, vulgar fraction
простой множитель	prime factor
простые числа	prime numbers
ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ	spatial
пространственный угол	spatial angle
пространственная фигура	spatial figure
ПРОСТРАНСТВО	space
безграничное пространство	infinite space
ПРОТИВНЫЙ (син. противоположный)	opposite
доказательство от противного	reductio ad absurdum proof, the rule of contraries
ПРОТИВОЛЕЖАЩИЙ, -ая, -ее,-ие	opposite
противолежащая сторона	opposite side
противолежащий угол	alternate angle
ПРОТИВОПОЛОЖНО, нареч.	oppositely
противоположно направленный	oppositely directed
ПРОТИВОПОЛОЖНЫЙ (син. противный)	opposite, contrary
противоположные величины	opposite quantities
противоположные знаки	contrary signs
противоположная сторона	opposite side
противоположный угол	opposite angle
противоположные числа	contrary numbers
диаметрально противоположный	diametrically opposite, antipodal
неравенства противоположного смысла	inequalities of opposite sense
ПРОТИВОРЕЧИВЫЙ	contradictory
ПРОТИВОРЕЧИЕ	contradiction
ПРОТИВОРЕЧИТЬ, //, только нес. в., чему?	to contradict
противоречить условию задачи	to contradict the condition of a task
ПРОХОДЯЩИЙ, -ая, -ее, -ие	passed through
отрезок, проходящий через точку А	segment passed through point A
ПРОЦЕНТ (сотая часть числа)	percentage (one-hundredth of a number), interest
сложные проценты	compound interests
ПРОЦЕНТНЫЙ	percentage
процентное отношение	percentage ratio
ПРОЦЕСС	process
ПРЯМАЯ, сущ.	straight line
бесконечная прямая	infinite straight line
касательная прямая	tangent line
параллельная прямая	parallel line
пересекающиеся прямые	intersecting straight lines
перпендикулярная прямая	perpendicular line
произвольная прямая	arbitrary straight line
секущая прямая	secant line

скрещивающиеся прямые	crossing straight lines
ПРЯМОЙ	straight, direct, right
прямая зависимость	direct dependence
прямой конус	right cone
прямая линия	straight line
прямой параллелепипед	right parallelepiped
прямая призма	right prism
прямая пропорциональность	direct proportionality
прямая теорема	direct theorem
прямой угол	right angle
прямой цилиндр	right cylinder
ПРЯМО ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЙ	directly proportional
прямо пропорциональные величины	directly proportional quantities
ПРЯМОУГОЛЬНИК	rectangle
прямоугольный	rectangular
прямоугольные координаты	rectangular coordinates, Cartesian coordinates
прямоугольный параллелепипед	rectangular parallelepiped
прямоугольная система координат	rectangular coordinate system, Cartesian coordinates
прямоугольная трапеция	rectangular trapezium
прямоугольный треугольник	right-angled triangle
ПУСТЬ	let
пусть а=1	let a be equal to 1
ПЯТИЗНАЧНЫЙ	five-digits
пятизначное число	five-digits number
пятиугольник	pentagon
пятиугольный	pentagonal
пятиугольная звезда	pentagonal star

Р

РАВЕНСТВО	equality
равенство не нарушится	the equality will not be disturbed
равенство справедливо	equality is true
буквенное равенство	letter equality
числовое равенство	numerical equality
РАВНО, нареч.	equal (to)
РАВНОБОЧНЫЙ (син. равнобедренный)	isosceles
равнобочная трапеция	isosceles trapezium
РАВНОБЕДРЕННЫЙ (син. равнобочный)	isosceles
равнобедренный треугольник	isosceles triangle
РАВНОВЕЛИКИЙ, -ая, -ое, -ие	equidimentional
равновеликие фигуры	equidimentional figures
РАВНОСИЛЬНОСТЬ	equivalence
нарушать равносильность	to break equivalence
РАВНОСИЛЬНЫЙ (син. эквивалентный)	equivalent
равносильное уравнение	equivalent equation

равносильные неравенства	equivalent inequality
РАВНОСОСТАВЛЕННЫЙ	with common base and equal altitudes
равносоставленные многоугольники	polygons with common base and equal altitudes
РАВНОСТОРОННИЙ	equilateral
равносторонний треугольник	equilateral triangle
РАВНОУГОЛЬНЫЙ	equiangular
равноугольный треугольник	equiangular triangle
РАВНОУДАЛЕННЫЙ	equidistant
точки, равноудалённые от центра	equidistant points
РАВНЫЙ, чему?	equal
угол ABC, равный углу A'B'C	angle ABC equal to angle A'B'C
РАВНЯТЬСЯ, /, только нес. в., чему?	to be equal
x равняется семи	x is equal to seven, x equals seven
РАДИАН	radian
дуговой радиан	arc radian
РАДИАННЫЙ	radian
радианная мера	radian measure
РАДИАЛЬНЫЙ	radial
РАДИКАЛ (син. корень)	radical (syn. root)
РАДИУС	radius
радиус-вектор	radius vector
радиус окружности	radius of a circle
радиус правильного многоугольника	radius of a regular polygon
радиус шара	radius of a sphere
РАЗБИВАТЬ, /, нес. в., что?, на что?, РАЗБИТЬ, /, сов. в. (1 л. мн. ч. РАЗОБЬЁМ)	to divide
разбить члены многочлена на группы	to divide terms of a polynomial into groups
РАЗБИТЬ (см. разбивать)	
РАЗВЕРНУТЫЙ угол	flat angle
РАЗВЕРНУТЬ (см. разворачивать)	
РАЗВЕРТКА	involute, evolvent
РАЗВОРАЧИВАТЬ /, нес. в., что?, РАЗВЕРНУТЬ, /, сов. в.	to develop, to unfold
разворачивать угол	to unfold an angle
РАЗДЕЛИТЬ (см. делить)	
РАЗЛАГАТЬ, /, нес. в., что?, на что?, РАЗЛОЖИТЬ, //, сов. в.	to expand
разлагать число на простые множители	to expand the number into simple factors
РАЗЛИЧАТЬСЯ, /, нес. в., чем?	to differ
различаться знаками	to differ in signs
РАЗЛИЧИЕ	difference
РАЗЛИЧНО, нареч.	differently
различно направленные отрезки	differently directed segments
РАЗЛИЧНЫЙ	different
различные способы решения	different methods of solution
РАЗЛОЖЕНИЕ, чего?, на что?	expansion, factoring
разложение числа на простые множители	factorisation of a number
РАЗЛОЖИТЬ (см. разлагать)	

РАЗМЕР	dimension, extent, size
размеры тела	dimensions of a body
РАЗМЕЩЕНИЯ, только мн. ч.	permutations, disposals, arrangements
число размещений	number of permutations
РАЗНОСТЬ, ж. р.	difference
разность квадратов	difference of squares
разность кубов	difference of cubes
РАЗНОСТОРОННИЙ	scalene
разносторонний треугольник	scalene triangle
РАЗНЫЙ	different
разные способы решения	different methods of solution
РАЗРЕЗ	section, cut
в разрезе	sectional view
РАЗРЫВНЫЙ	discontinuous
разрывная функция	discontinuous function
РАЗРЯД	sort, rank
десятичный разряд (чисел)	decimal place
РАЗЪЯСНИТЬ (см. разъяснять)	
РАЗЪЯСНЯТЬ, /, нес. в., что?, РАЗЪЯСНИТЬ, //, сов. в.	to elucidate, to explain
разъяснять новое понятие	to elucidate new concept
РАСКРЫВАТЬ, /, нес. в., что?, РАСКРЫТЬ, /, сов. в. (1 л. мн. ч. РАСКРОЕМ)	to open, to removal
раскрывать скобки	to removal the brackets
РАСКРЫТЬ (см. раскрывать)	
РАСКРЫТИЕ	opening, removaling
раскрытие скобок	removaling of the brackets
РАСПОЛАГАТЬ, /, нес. в., что? по чему?, РАСПОЛОЖИТЬ, //, сов. в.	to arrange, to dispose
располагать члены уравнения по возрастающим (убывающим) степеням x	to arrange the terms of an equation according to the increasing (decreasing) powers of x
РАСПОЛОЖЕНИЕ, чего?, по чему?	arrangement, disposition
расположение членов уравнения по возрастающим (убывающим) степеням x	arrangement of terms of an equation according to the increasing (decreasing) powers of x
РАСПОЛОЖЕННЫЙ	disposed, arranged
отрезок, расположенный на плоскости	segment disposed on a plane
подобно расположенные фигуры	similarly disposed figures
РАСПОЛОЖИТЬ (см. располагать)	
РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫЙ ЗАКОН	distributive law
РАССЕКАТЬ /, нес. в., что?, чем?, на что?, РАССЕЧЬ, /, сов. в. (1 л. мн. ч. РАССЕКУТ; прош. вр. РАССЁК, РАССЕКЛИ)	to cut
рассекать пирамиду плоскостью на две части	to cut a pyramid by a plane into two parts
РАССЕЧЁННЫЙ, чем?	cut
пирамида, рассечённая плоскостью	pyramid cut by a plane

РАССЕЧЬ (см. рассекать)	
РАССМАТРИВАТЬ, /, нес. .в, что?, РАССМОТРЕТЬ, //, сов. в:	to consider, to regard
рассматривать данный случай	to consider the given example (case)
РАССТОЯНИЕ, между чем?, от чего?, до чего?	distance
расстояние между двумя точками	distance between two points
расстояние от точки до прямой	distance from the point to the straight line
кратчайшее расстояние	the shortest distance
РАССУЖДЕНИЕ	reasoning
РАСЧЁТ	calculation
РАЦИОНАЛЬНЫЙ	rational
рациональный способ решения	rational way (method) of solution
рациональное число	rational number
РЕЗЮМИРОВАТЬ, /, только нес. в.	to summarize
РЕБРО, род. п. мн. ч. РЁБЕР	edge, rib
ребро многогранника	edge of a polyhedron
боковое ребро	lateral edge
РЕЗУЛЬТАТ	result
РЕШАТЬ, /, нес. в., что?, РЕШИТЬ, //, сов., в.	to solve
решать задачу (пример, уравнение)	to solve a problem (an example, an equation)
РЕШАТЬСЯ, /, нес. в.	to be solved
эта задача решается следующим образом	the problem is solved in the following way
РЕШЕНИЕ	solution
решение задачи	solving of a problem
решение неравенств	solving of inequalities
решение треугольников	solution of triangles
аналитическое решение	analytical solution
верное решение	correct solution
графическое решение	graphic solution
единственное решение	unique solution
идеальное решение	ideal solution
общее решение	general solution
постороннее решение	extraneous solution
примерное решение	approximate solution
частное решение	particular solution, partial solution
иметь решение	to have a solution
РИМСКИЙ, -ая, -ое, -ие	Roman
римская цифра	Roman numeral
РОМБ	rhomb (us)
РЯД	series, row, line
бесконечный ряд	infinite series
биноминальный ряд	binomial series
конечный ряд	finite series
натуральный ряд чисел	natural series of numbers
ряд равных отношений	series of equal ratios

С

САНТИМЕТР (см)	centimetre (cm)
квадратный сантиметр	square centimetre
кубический сантиметр	cubic centimetre
СВОБОДНЫЙ	free, spare
свободный член	free term
СВОДИТЬСЯ, //, нес. в., к чему?, СВЕСТИСЬ, /, сов. в. (3 л. ед. ч. СВЕДЕТСЯ; прош. вр. СВЁЛСЯ, СВЕЛИСЬ)	to come
решение сводится к замене уравнения равносильным	solution comes to replacement of an equation by an equivalent one
СВОЙСТВО	property
свойства дробей	properties of fractions
свойства логарифмов	properties of logarithms
свойства неравенств	properties of inequalities
очевидное свойство	obvious property
СГРУППИРОВАТЬ (см. группировать)	
СДЕЛАТЬ (см. делать)	
СЕГМЕНТ	segment
круговой сегмент	segment of a circle
шаровой сегмент	spherical segment
площадь сегмента	area of a segment
СЕКАНС	secant
СЕКТОР	sector
круговой сектор	sector of a circle
шаровой сектор	spherical sector
СЕКУНДА	second
СЕКУЩАЯ, сущ.	secant
СЕКУЩИЙ, -ая, -ее, -ие	secant
секущая линия	secant line
секущая плоскость	secant plane
секущая прямая	secant straight line
СЕРЕДИНА	middle
середина стороны треугольника	the middle of a side of a triangle
СЕЧЕНИЕ	section
сечение конуса	section of a cone
диагональное сечение	diagonal section
золотое сечение	golden section
коническое сечение	conic section
круговое сечение	circular section
параллельное сечение	parallel section
перпендикулярное сечение	perpendicular section
поперечное сечение	cross section
СИМВОЛ	symbol
СИММЕТРИЧНЫЙ, чему?, относительно чего?	symmetrical
точка А симметричная точке А' относительно прямой АВ	point A is symmetrical to point A' relatively to straight line AB

СИММЕТРИЯ	symmetry
симметрия вращения	symmetry of rotation
зеркальная симметрия	mirror symmetry
осевая симметрия	axial symmetry
центральная симметрия	central symmetry
ось симметрии	axis of symmetry
точка симметрии	point of symmetry
СИНУС	sine
СИНУСОИДА	sinusoid, sine curve
СИСТЕМА	system
система координат	system of coordinates
система уравнений	system of equations
линейная система	linear system
метрическая система	metric system
СКЛАДЫВАТЬ, /, нес. в., что?, СЛОЖИТЬ, //, сов. в.	to add, to sum
складывать два числа	to add two numbers
СКОБКА, род. п. мн. ч. СКОБОК	bracket
квадратные скобки	brackets, square brackets
круглые скобки	parentheses, round brackets
фигурные скобки	braces, curled brackets
выносить (вынести) за скобки	to take out of brackets
заключать в скобки	to put in brackets
закрывать (закрыть) скобки	to close the brackets
раскрывать (раскрыть) скобки	to remove the brackets.
СКОЛЬКО (сколь) УГОДНО	as much as one wants, any amount
сколь угодно большая (малая) величина	infinite (infinitesimal) quantity
СКРЕЩИВАЮЩИЙСЯ, -аяся, -ееся, -иеся	crossing
скрещивающиеся прямые	crossing straight lines
СЛАГАЕМОЕ, сущ.	item, summand
СЛЕД	trace
след движения точки	tracing a point
СЛЕДОВАТЕЛЬНО (син. итак)	therefore, consequently, hence (syn. so, thus)
СЛЕДОВАТЬ, /, нес. в., из чего?, ПОСЛЕДОВАТЬ, /, сов. в. (3 л. ед. ч. ПОСЛЕДУЕТ) (син. вытекать)	to follow
из теоремы следует, что...	it follows from the theorem...
СЛЕДСТВИЕ, из чего?	consequence
следствие из теоремы	consequence from the theorem
из теоремы вытекает следствие	the consequence follows from the theorem
СЛЕДУЮЩИЙ, -ая, -ее, -ие	following
рассмотрим следующий случай	let us consider the following case
СЛИВАТЬСЯ, /, нес. в., во что?, СЛИТЬСЯ, /, сов. в. (3 л. мн. ч. СОЛЬЮТСЯ)	to coincide, to merge
сливаться в одну точку	to merge into one point
СЛИВШИЙСЯ, -аяся, -ееся, -иеся точки,	coincided, merged
слившиеся в одну	points merged into one

СЛОЖИТЬ (см. складывать)	
СЛОЖЕНИЕ (ант. вычитание)	addition (ant. subtraction)
СЛОЖНЫЙ	complex, compound
сложные проценты	compound interest
СЛОЙ	layer, stratum
шаровой слой	spherical layer
СЛУЖИТЬ, //, нес. в., чем?	to serve, to be
служить единицей измерения	to serve as a unit of measure
СЛУЧАЙ	case
аналогичный случай	similar case
возможный случай	possible case
исключительный случай	exceptional case
общий случай	general case
простейший случай	the simplest case
частный случай	special case, particular case
СЛУЧАЙНЫЙ	accidental, random
случайные величины	random variables
СМЕЖНЫЙ	adjacent
смежные стороны	adjacent sides
смежные углы	adjacent angles
СМЕШАННЫЙ	mixed
смешанная дробь	mixed fraction
смешанное число	mixed number
уравнения смешанного типа	equations of mixed type
СМЫСЛ	sense, meaning
одинаковый смысл	equal sense
узкий смысл	narrow sense
широкий смысл	broad sense
иметь смысл	to make sense
приобретать смысл	to obtain sense
терять смысл	to lose sense
СНЕСТИ (см. сносить)	
СНОСИТЬ, //, нес. в., что?, СНЕСТИ, / сов. в (1 л. мн. ч. СНЕСЕМ; прош. вр. СНЁС, СНЕСЛИ)	to bring down, to fetch down
три сносим, два в уме	we bring three down, carry two
сносить остаток под черту	to bring a remainder down the line
СНОСЯ, деепричю	bringing down
снося остаток под черту	bringing a remainder down the line, bringing down the remainder
СОБРАНИЕ	gathering
собрание нескольких единиц	gathering of several units
СОВМЕСТНЫЙ	compatible
совместная система уравнений	compatible system of equations
СОВМЕСТИТЬ (см. совмещать)	
СОВМЕЩАТЬ, / нес. в., что? СОВМЕСТИТЬ, //, сов. в.	to match
совмещать вершины углов	to match vertices of angles
совмещать отрезки	to match segments
СОВМЕСТИТЬСЯ (см. совмещаться)	

СОВМЕЩАТЬСЯ, /, нес. в., чем? СОВМЕСТИТЬСЯ, //, сов. в.	to be matched
при наложении равных фигур друг на друга, они совместятся всеми своими точками	on overlapping two equal figures together they coincide in all their points
СОВМЕЩЁННЫЙ, чем?	matched
совмещённые отрезки	matched segments
СОВОКУПНОСТЬ, ж. р.	set, totality
совокупность точек	totality of points
СОВПАДАТЬ, / нес, в., чем?, СОВПАСТЬ, / сов. в. (3 л. ед. ч. СОВПАДЁТ; прош. в р. СОВПАЛ, СОВПАЛИ)	to coincide, to match together
совпадать вершинами	to coincide with vertices
совпадать всеми своими точками	to coincide with all their points
совпадать концами	to coincide with ends
СОВПАДАЮЩИЙ, -ая, -ее, -ие	coinciding
совпадающие плоскости	coinciding planes
СОВПАДЕНИЕ	coincidence
вращать до совпадения	to rotate till coincidence
СОВПАСТЬ (см. совпадать)	
СОДЕРЖАТЬ, //, только нес. в., что?, чем?	to contain
содержать множителем одно и то же выражение	to contain as a factor one and the sams expression
СОДЕРЖАТЬСЯ, //, только нес. в., в чем?	to contain
три содержится в девяти три раза	three goes into nine three times, nine contains three three times
СОДЕРЖАЩИЙ, -ая, -ее, -ие	containing
уравнение, содержащее три члена	equation contains three terms
СОЕДИНЕНИЯ, только мн. ч.	combinations
СОЕДИНИТЬ (см. соединять)	
СОЕДИНИТЬ, /, нес. в., что?, чем?, с чем?, СОЕДИНИТЬ, //, сов. в.	to join, to connect
соединять вершину треугольника с серединой противоположной стороны	to join a vertex of a triangle with the middle of the opposite side
соединять точки отрезком	to connect points by a segment
СОЕДИНЯЮЩИЙ, -ая, -ее, -ие, что?, с чем?	joining
отрезок, соединяющий точку В с точкой С	segment joining point B with point C
СОИЗМЕРИМЫЙ	commensurable
соизмеримые величины	commensurable quantities
соизмеримые отрезки	commensurable segments
СОКРАТИМЫЙ	reducible
сократимая дробь	reducible fraction
СОКРАТИТЬ (см. сокращать)	
СОКРАЩАТЬ, / нес. в., что?, на что? СОКРАТИТЬ, // сов. в.	to reduce, to cancel, to abbreviate

сокращать дробь	to cancel a fraction
СОКРАЩЕНИЕ	cancellation
СОКРАЩЕННЫЙ	cancelled
сокращённый приём деления и умножения	short method of division and multiplication
СОМНОЖИТЕЛЬ, м. р.	factor
СООТВЕТСТВЕННО, нареч.	correspondingly, accordingly
соответственно равные стороны углы с соответственно параллельными или перпендикулярными сторонами	correspondingly equal sides angles with correspondingly parallel or perpendicular sides
СООТВЕТСТВЕННЫЙ	corresponding
соответственные стороны	corresponding sides
соответственные углы	corresponding angles
СООТВЕТСТВОВАТЬ, /, только нес. в., чему? (3 л. ед. ч. СООТВЕТСТВУЕТ)	to correspond
соответствовать условию задачи	to correspond to the condition of a problem
СООТВЕТСТВУЮЩИЙ, -ая, -ее, -ие	corresponding
дуга, соответствующая углу	arc corresponding to an angle
соответствующий условию задачи	corresponding to the condition of a problem
СООТНОШЕНИЕ, чего?, между чем?	ratio, relation, correlation
соотношение углов и сторон (между сторонами и углами) треугольника	relation between angles and sides of a triangle
СОПРИКАСАЮЩИЙСЯ, -аяся, -ееся, -иеся	contacted
соприкасающиеся плоскости	contacted planes
СОПРЯЖЕННЫЙ	conjugate
сопряжённые числа	conjugate numbers
СОСЕДНИЙ	adjacent
соседние точки	adjacent points
СОСТАВИТЬ (см. составлять)	
СОСТАВЛЕНИЕ	composition, formation
составление пропорции	formation of a proportion
составление уравнений	formation of equations
СОСТАВЛЯТЬ, /, нес. в., что?, СОСТАВИТЬ, //, сов. в.	to compose, to form, to constitute
составить уравнение	to work out an equation
составить натуральный ряд чисел	to form natural series of numbers
составлять 100%	to make up 100%
СОСТАВЛЯЮЩИЙ, -ая, -ее, -ие	forming
лучи, составляющие прямую	rays forming a straight line
СОСТАВНОЙ	compound, composite
составные числа	composite numbers
СОСТОЯТЬ, //, только нес. в., из чего?	to consist of
состоять из нескольких членов	to consist of several terms
СОСТОЯЩИЙ, -ая, -ее, -ие	consisting
число, состоящее из трех цифр	number consisting of three-figures
СОСЧИТАТЬ (см. считать)	
СОТНЯ, род. п. мн. ч. СОТЕН	a hundred
СОЧЕТАНИЕ, чего?, с чем?	combination
СОЧЕТАТЕЛЬНЫЙ	combinative

сочетательный закон	combinative law
СПИРАЛЬ, ж. р.	spiral, helix
СПОСОБ (син. приём)	way, method
способ группировки	method of grouping (classification)
решать задачу другим способом	to solve a problem in another way
СПРАВЕДЛИВЫЙ, для чего?	true
равенство, справедливое для данных значений x	equality is true for the given values of x
СПРОЕКТИРОВАТЬ (см.проектировать)	
СРАВНЕНИЕ, чего?, с чем?	comparison
сравнение одного треугольника с другим	comparison of one triangle with another
СРАВНИВАТЬ, /, нес. в., что?, с чем?, СРАВНИТЬ, //, сов. в.	to compare
сравнивать один отрезок с другим	to compare one segment with another
сравнивать углы	to compare angles
СРАВНИТЬ (см. сравнивать)	
СРЕДНИЙ	middle, mean
среднее арифметическое, сущ.	arithmetical mean
средняя величина	mean value
среднее геометрическое, сущ.	geometric mean
средняя линия	midline
средняя ошибка	mean error
средний член	middle term
среднее пропорциональное, сущ.	the mean proportional
СТАВИТЬ, //, нес. в., что?, ПОСТАВИТЬ, //, сов. в.	to put
ставить знак	to put a sign
СТЕПЕНЬ, ж. р.	power; degree
степень точности	degree of accuracy
степень уравнения	degree of an equation
степень числа	power of a number
дробная степень	fractional power
нулевая степень	zero power
отрицательная степень	negative power
положительная степень	positive power
возвышение в степень	involution, raising to a power
основание степени	base of a power
СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИЙ, -ая, -ое, -ие	stereometrical
стереометрическая задача	stereometrical problem
СТЕРЕОМЕТРИЯ	stereometry, solid geometry
СТОРОНА	side
большая сторона	greater side
боковая сторона	lateral side
общая сторона	common side
прилежащая сторона	adjacent side
противолежащая сторона	opposite side
противоположная сторона	opposite side
соответственные стороны	corresponding sides
сходственная сторона	similar side

СТОЯТЬ, //, нес. в.	to be, to stand
стоять в скобках	to be in brackets
стоять под чертой	to be under the line
СТОЯЩИЙ, -ая, -ее, -ие	being, standing
выражение, стоящее в скобках	expression standing in brackets
СТРЕМИТЬСЯ, //, только нес. в., к чему?	to tend
стремиться к бесконечности	to tend to infinity
стремиться к нулю	to tend to zero
СТРОГИЙ, -ая, -ое, -ие	strict
строгое доказательство	strict proof
строгое неравенство	strict inequality
СТРОГО, нареч.	strictly
строго положительная величина	strictly positive quantity
СТРОИТЬ, //, нес. в., что?, по чему?, ПОСТРОИТЬ, //, сов, в.	to build, to construct
строить треугольник по трем сторонам	to construct a triangle by three sides
СУММА	sum
сумма сторон	sum of sides
сумма углов	sum of angles
сумма чисел	sum of numbers
СУЩЕСТВОВАНИЕ	existence
для существования решения необходимо и достаточно...	for existence of solution it is necessarily and sufficiently...
СУЩЕСТВОВАТЬ, //, только нес в. (3 л. ед. ч. СУЩЕСТВУЕТ)	to exist
если существует хотя бы одно число...	if there is even a single number...
СФЕРА	sphere
СФЕРИЧЕСКИЙ, -ая, -ое, -ие	spherical
сферическая зона	spherical zone
сферическая поверхность	spherical surface
сферическое поле	spherical belt
сферический слой	spherical layer
СФОРМУЛИРОВАТЬ (см. формулировать)	
СХЕМА	diagram, scheme
СХОДСТВЕННЫЙ	similar, like, compatible
сходственные стороны	similar sides
сходственные углы	similar angles
СЧЁТ	count, counting
вести счёт	to count, to account
СЧЁТНАЯ ЛИНЕЙКА	slide-rule
СЧЁТНАЯ МАШИНА	computing machine
1. СЧИТАТЬ, /, нес. в., что?, СОСЧИТАТЬ, /, сов. в.	to calculate, to count
считать десятки	to count tens
считать до ста	to count to a hundred
2. СЧИТАТЬ (син. подразумевать, понимать)	to consider (syn. to mean, to imply)
СЧИТАТЬСЯ, /, только нес. в.	to be considered
задача считается решённой, если...	the problem is considered to be solved if...

Т

ТАБЛИЦА	table
таблица логарифмов	table of logarithms
таблица умножения	multiplication table
логарифмические таблицы	tables of logarithms
ТАНГЕНС	tangent
ТАНГЕНСОИДА	tangensoid
ТЕКУЩИЙ, -ая, -ее, -ие	current
текущие координаты	current coordinates
ТЕЛЕСНЫЙ УГОЛ	solid angle
ТЕЛО	body; solid
тело вращения	solid of rotation (revolution)
геометрическое тело	geometrical solid
поверхность тела	surface of a solid
ТЕОРЕМА	theorem
теорема Пифагора	theorem of Pythagoras
обратная теорема	converse theorem
прямая теорема	direct theorem
доказывать теорему	to prove a theorem
ТЕОРИЯ	theory
теория вероятности	theory of probability
теория относительности	theory of relativity
теория чисел	theory of numbers
ТЕРЯТЬ, /, нес. в., что?, ПОТЕРЯТЬ, /, сов. в.	to lose
терять корень	to lose a root
терять смысл	to lose sense
ТЕТРАЭДР (син. четырехгранник)	tetrahedron
правильный тетраэдр	regular tetrahedron
ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА...	then and only then...
ТОЖДЕСТВЕННЫЙ	identical
тождественное преобразование	identical transformation
ТОЖДЕСТВО	identity
ТОЛЩИНА, только ед. ч.	thickness
не иметь толщины	to have no thickness
ТОЛЬКО (син. лишь)	only
лишь только	as soon as, only, no sooner than
ТОЧКА, род. п. мн. ч., ТОЧЕК	point
точка касания	point of contact
точка пересечения	point of intersection
бесконечно удалённая точка	infinity point
воображаемая точка	imaginary point
проекция точки	projection of a point
ТОЧНОСТЬ, ж. р., только ед. ч.	accuracy, precision, exactness
точность вычисления	accuracy of calculation
точность измерения	accuracy of measurement
степень точности	degree of accuracy
с точностью до...	correct to within, with accuracy to..

ТОЧНЫЙ	accurate, precise, exact
точное доказательство	exact proof (evidence)
точное частное	exact quotient
ТРАЕКТОРИЯ	trajectory
ТРАНСПОРТИР	protractor
ТРАПЕЦИЯ	trapezium
прямоугольная трапеция	rectangular trapezium
равнобедренная трапеция	isosceles trapezium
равнобочная трапеция	isosceles trapezium
ТРЕБОВАНИЕ	demand
удовлетворять требованию	to meet the requirement, to answer the demand
ТРЕБОВАТЬ, /, нес. в., чего?, ПОТРЕБОВАТЬ, /, сов. в. (3 л. ед. ч. ПОТРЕБУЕТ)	to demand, to require
требовать проверки	to require checking
ТРЕТЬ, ж. р.	one third, a third
ТРЕУГОЛЬНИК	triangle
вписанный треугольник	inscribed triangle
косоугольный треугольник	oblique triangle
остроугольный треугольник	acute (-angled) triangle
подобные треугольники	similar triangles
правильный треугольник	regular triangle
прямоугольный треугольник	right (-angled) triangle
равнобедренный треугольник	isosceles triangle
равносторонний треугольник	equilateral triangle
равноугольный треугольник	equiangular triangle
равные треугольники	equal triangles
разносторонний треугольник	scalene triangle
тупоугольный треугольник	obtuse (-angled) triangle
решение треугольников	solution of triangles
ТРЕУГОЛЬНЫЙ	triangular
треугольная форма	triangular form
ТРЕХГРАННЫЙ	trihedral
трехгранная пирамида	trihedral pyramid
трехгранная призма	trihedral prism
трехгранный угол	trihedral angle
ТРЕХЗНАЧНЫЙ	three-digit, three-place
трехзначное число	three-digit number
ТРЕХЧЛЕН	trinomial
квадратный трехчлен	square trinomial
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ, -ая, -ое, -ие	trigonometric (al)
тригонометрическое уравнение	trigonometric (al) equation
тригонометрическая форма	trigonometric (al) form
тригонометрические функции	trigonometric (al) functions
ТРИГОНОМЕТРИЯ	trigonometry
ТРИЛЛИОН	billion (10^{12})
ТУПОЙ (ант. острый)	obtuse (ant. acute)
тупой угол	obtuse angle
ТУПОУГОЛЬНЫЙ	obtuse-angled

тупоугольный треугольник	obtuse (-angled) triangle
ТЫСЯЧА	thousand
ТЯЖЕСТЬ, ж. р.	gravity
центр тяжести	centre of gravity

У

УВЕЛИЧЕНИЕ	increase
увеличение числа в три раза (на три)	increase of a number three times (by three)
УВЕЛИЧЕННЫЙ, во сколько раз?, на сколько?	increased
число, увеличенное в два раза (на два)	number, increased two times (by two)
УВЕЛИЧИВАТЬ, /, нес. в., что?, во сколько раз?, на сколько?, УВЕЛИЧИТЬ, //, сов. в. (ант. уменьшать)	to increase (ant. to reduce, to cut down, to decrease)
увеличивать число в пять раз (на пять)	to increase a number five times (by five)
УВЕЛИЧИТЬ (см. увеличивать)	
УГЛОВОЙ	angular
угловой градус	angular degree
угловой коэффициент	angular coefficient
УГОЛ, род. п. ед. ч. УГЛА, им. п. мн. ч. УГЛЫ	angle
угол поворота	angle of turn, angle of rotation
углы с параллельными сторонами	angles with the parallel sides
утлы с перпендикулярными сторонами	angles with the perpendicular sides
вертикальные углы	vertical angles
внешние накрест лежащие углы	alternate-exterior angles
внешние односторонние углы	exterior one-sided angles
внешний угол	exterior angle
внутренние накрест лежащие углы	alternate-interior angles
внутренние односторонние углы	interior one-sided angles
внутренний угол	interior angle
вписанный угол	inscribed angle
двухгранный угол	dihedral angle
двусторонний угол	two-sided angle
дополнительный угол	complementary angle
координатный угол	coordinate angle
многогранный угол	polyhedral angle
накрест лежащие углы	alternate angles
общие углы	common angles
односторонние углы	one-sided angles
описанный угол	circumscribed angle
острый угол	acute angle
плоский угол	plane angle
полный угол	full angle
прилежащий угол	adjacent angle
пространственный угол	spatial angle
противолежащий угол	alternate angle
противоположный угол	opposite angle
прямой угол	right angle

развёрнутый угол	flat angle, straight angle
смежные углы	adjacent angles
соответственные углы	corresponding angles
трехгранный угол	trihedral angle
тупой угол	obtuse angle
центральный угол	central angle
УГОЛЬНИК	set square
УДАЛЕНИЕ, чего?, от чего?	moving away
УДАЛЕННЫЙ, от чего?	remoted, outlying, moved away
точка, удалённая от прямой	point outlying (remoted) from the straight line
УДВАИВАТЬ, /, нес. в., что? УДВОИТЬ, //, сов. в.	to double
удваивать число	to double a number
УДВОЕНИЕ, чего?	doubling
удвоение числа	doubling of a number
УДВОЕННЫЙ	doubled
удвоенное произведение	doubled product
УДВОИТЬ (см. удваивать)	
УДЛИНЕНИЕ, чего?	lengthening
удлинение отрезка	lengthening of a segment
УДЛИНЯТЬ, /, нес. в., что?, на сколько?, УДЛИНИТЬ, //, сов. в.	to lengthen, to make longer
удлинить отрезок на 2 см	to make a segment longer by 2 cm
УДОВЛЕТВОРЯТЬ, /, нес. в. чему? УДОВЛЕТВОРИТЬ, //, сов. в.	to satisfy
удовлетворять требованию	to meet the demand
удовлетворять условию	to answer the condition
УМЕНЬШАЕМОЕ, сущ.	minuend
УМЕНЬШАТЬ, /, нес. в., что?, во сколько раз?, УМЕНЬШИТЬ, //, сов. в. (ант. увеличивать)	to reduce, to cut down, to decrease (ant. to increase)
УМЕНЬШЕНИЕ	decrease, diminution
уменьщение числа в три раза (на три)	diminution of a number three times (by three)
УМЕНЬШИТЬ (см. уменьшать)	
УМЕСТИТЬСЯ (см. умещаться)	
УМЕЩАТЬСЯ, /, нес. в., в чем?, сколько раз?, УМЕСТИТЬСЯ, //, сов. в.	to put in, to find room (for)
отрезок AB уместится в отрезке CD пять раз	there is room for segment AB in segment CD five times
УМНОЖАТЬ, /, нес. в., что?, на что?, УМНОЖИТЬ, //, сов. в. (ант. делить)	to multiply (ant. to divide)
умножить a на b	to multiply a by b
УМНОЖЕНИЕ, чего?, на что?	multiplication
умножение целого числа на дробь	multiplication of a whole number by a fraction
УМНОЖЕННЫЙ, на что?	multiplied
число, умноженное на два	number multiplied by two
УМНОЖИТЬ (см. умножать)	

УНИЧТОЖАТЬ, /, нес. в., что?, УНИЧТОЖИТЬ, //, сов. в.	to spare, to cancel, to destroy, to removal
уничтожать иррациональность в знаменателе	to spare from irrationality in the denominator
УНИЧТОЖАТЬСЯ, /, нес. в., УНИЧТОЖИТЬСЯ, //, сов в.	to be cancelled, to do away with
взаимно уничтожаться	to be cancelled mutually
УНИЧТОЖИТЬ (см. уничтожать)	
УНИЧТОЖИТЬСЯ (см. уничтожаться)	
УПАСТЬ, (см. падать)	
УПРОСТИТЬ (см. упрощать)	
УПРОЩАТЬ, /, нес. в., что? УПРОСТИТЬ, //, сов. в.	to simplify
упрощать выражение	to simplify an expression
УПРОЩЕНИЕ, чего?	simplification
упрощение выражения	simplification of an expression
УРАВНЕНИЕ	equation
уравнение второй степени	equation of the second degree
уравнение высших степеней	equation of the highest degrees
уравнение n-й степени	equation of the n-th degree
уравнение первой степени	simple equation, linear equation
уравнение приведённого типа	equation of reduced form
уравнения смешанного типа	equations of mixed type
уравнения с одним неизвестным	equation with one unknown
алгебраическое уравнение	algebraic equation
биквадратное уравнение	biquadratic equation
буквенное уравнение	letter equation
вспомогательное уравнение	auxiliary equation
двучленное уравнение	binomial equation
иррациональное уравнение	irrational equation
квадратное уравнение	square equation, quadratic equation
кубическое уравнение	cubic equation
логарифмическое уравнение	logarithmic equation
неполное уравнение	incomplete equation
показательное уравнение	exponential equation
полное уравнение	complete equation
равносильное уравнение	equivalent equation
совместные уравнения	compatible equations
тригонометрическое уравнение	trigonometric equation
числовое уравнение	numerical equation
корень уравнения	root of an equation
левая часть уравнения	left-hand side of an equation, first member of an equation
правая часть уравнения	right-hand side of an equation, second member of an equation
приёмы решения уравнений	methods of solving of equations
система уравнений	system of equations
степень уравнения	degree of an equation
УСЕЧЁННЫЙ	truncated, frustum
усечённый конус	truncated cone, frustum of a cone

усечённая пирамида	truncated pyramid, frustum of a pyramid
УСЛОВИЕ	condition
условие задачи	condition of a problem
по условию	according to the condition
достаточное условие	sufficient condition
необходимое условие	necessary condition
УСЛОВИТЬСЯ, //, сов. в.	to agree, to settle
условимся записывать так	let us agree to write it down in this way
УСЛОВНЫЙ	conditional
условное неравенство	conditional inequality
УСТАНАВЛИВАТЬ, /, нес. в., что?, УСТАНОВИТЬ, //, сов. в.	to determine
устанавливать свойство путём рассуждения	to determine the property by means of reasoning
УСТАНОВИТЬ (см.устанавливать)	
УТВЕРЖДАТЬ, /, нес. в., что?	to assert, to maintain, to approve
утверждать, что a=b	to assert that a=b
УТРАИВАТЬ, /, нес. в., что?, УТРОИТЬ, //, сов. в.	to treble
утраивать число	to treble a number
УТРОЕННЫЙ	trebled
утроенное произведение	trebled product
УТРОИТЬ (см. утраивать)	
УЧЕТВЕРЕННЫЙ	quadrupled, quadruplicated
учетверённое произведение	quadruplicated product
УЧЕСТЬ (см. учитывать)	
УЧЁТ	calculation, registration
учёт направления	taking the direction into account
УЧИТЫВАТЬ, /, нес. в., что?, УЧЕСТЬ, /, сов. в. (1 л. мн. ч. УЧТЁМ; прош. вр. УЧЕЛ, УЧЛИ)	to take into account
учитывать направление	to take the direction into account

Ф

ФАКТОРИАЛ	factorial
ФИГУРА	figure
геометрическая фигура	geometric figure
одноимённые фигуры	figures of the same name
плоская фигура	plane figure
подобные фигуры	similar figures
пространственная фигура	spatial figure
равновеликие фигуры	equivalent figures
симметричные фигуры	symmetrical figures
ФИГУРНЫЕ СКОБКИ	braces
ФОРМА	form
форма треугольника	form of a triangle
форма числа	form of a number
тригонометрическая форма	trigonometric (al) form
ФОРМУЛА	formula

формулы приведения	reduction formulas
ФОРМУЛИРОВАТЬ, /, нес. в., что?, СФОРМУЛИРОВАТЬ, /, сов. в. (1 л. мн. ч. СФОРМУЛИРУЕМ)	to formulate
формулировать теорему	to formulate a theorem
ФОРМУЛИРОВКА	formulation
формулировка теоремы	formulation of a theorem
ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ	functional
функциональная зависимость	functional dependence
ФУНКЦИЯ	function
аналитическая функция	analytic function
взаимно-обратные функции	reciprocal functions
вспомогательная функция	auxiliary function
двузначная функция	two-valued function
исследуемая функция	analysed function
квадратная функция	square function
круговая функция	circular function
линейная функция	linear function
логарифмическая функция	logarithmic function
многозначная функция	multiple-valued function
монотонная функция	monotonous function
непрерывная функция	continued function
нечётная функция	odd function
обратная функция	inverse function
ортогональная функция	orthogonal function
периодическая функция	periodic function
показательная функция	exponential function
разрывная функция	discontinued function
тригонометрическая функция	trigonometric(al) function
чётная функция	even function
элементарная функция	elementary function
аргумент функции	argument of a function
вид функции	form of a function
график функции	graph (diagram) of a function
значение функции	function value
обозначение функции	designation of a function

Х

ХАРАКТЕРИСТИКА	characteristic
характеристика логарифма	characteristic of a logarithm
ХОД	way, method
ход решения	way (method) of solution
ХОРДА	chord
ХОТЯ БЫ...	even if..., at least
хотя бы одно значение x	at least one value of x

Ц

ЦЕЛОЕ, сущ.	integer, whole number

нахождение целого по его части	finding a whole number from its part
ЦЕЛЫЙ	integral, whole
целый многочлен	integral polynomial
целый одночлен	integral monomial
целое число	whole number, integer
ЦЕНТР	centre
центр окружности	centre of a circle
центр подобия	centre of similarity
центр правильного многоугольника	centre of a regular polygon
центр симметрии	centre of symmetry
центр треугольника	centre of a triangle
центр тяжести	centre of gravity
ЦЕНТРАЛЬНЫЙ	central
центральная симметрия	central symmetry
центральный угол	central angle
ЦИЛИНДР	cylinder
вписанный цилиндр	inscribed cylinder
круглый цилиндр	round cylinder
круговой цилиндр	circular cylinder
наклонный цилиндр	oblique cylinder
описанный цилиндр	circumscribed cylinder
прямой цилиндр	right cylinder
ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ, -ая, -ое, -ие	cylindrical
цилиндрическая поверхность	cylindrical surface
ЦИРКУЛЬ, ж. р.	pair of compasses
пропорциональный циркуль	proportional compasses
ЦИФРА	digit, figure, numeral
значащая цифра	significant digit
арабская цифра	Arabic numeral
римская цифра	Roman numeral

Ч

ЧАСТНОЕ, сущ.	quotient
частное от деления	quotient (after division)
приближённое частное	approximate quotient
точное частное	exact quotient
ЧАСТНЫЙ	particular, special
частный вид	particular form
частное решение	particular solution, partial solution
частный случай	special (particular) case
ЧАСТЬ, ж. р. (син. доля)	part
вещественная часть	real part
десятая часть	tenth part
левая (правая) часть уравнения	the left (right)-hand side of an equation, first (second) member of an equation
мнимая часть	imaginary part
сотая часть	hundredth part
тысячная часть	thousandth part
нахождение части по целому	finding a part from the integer

ЧЕРТА	line
над чертой	above the line
под чертой	down the line
провести черту	to draw a line
ЧЕРТЕЖ	draught, drawing, sketch
ЧЕРТИТЬ, //, нес. в., что?, НАЧЕРТИТЬ, //, сов. в.	to draw
чертить фигуру	to draw a figure
ЧЕТВЕРТЬ, ж. р.	a quarter
четверть круга	a quarter of a circle, quadrant
ЧЕТНЫЙ	even
чётная функция	even function
чётное число	even number
ЧЕТЫРЕХЗНАЧНОЕ ЧИСЛО	four-digit number
ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК	quadrangle
ЧИСЛЕННЫЙ	numerical
численная величина	numerical quantity
ЧИСЛИТЕЛЬ, м. р.	numerator
ЧИСЛИТЕЛЬНОЕ, сущ.	number
количественное числительное	cardinal number
порядковое числительное	ordinal number
ЧИСЛО, род. п. ед. ч. ЧИСЛА, им. п. мн. ч. ЧИСЛА, род. п. мн. ч. ЧИСЕЛ	number
число перемещений	number of displacements
число перестановок	number of permutations
число размещений	number of permutations
число сочетаний	number of combinations
вещественное число	real number
взаимнообратные числа	reciprocal numbers
двузначное число	two-digit number
действительное число	real number
дробное число	fractional number
именованное число	concrete number
иррациональное число	irrational number
комплексное число	complex number
краткое число	multiple number
круглое число	round number
мнимое число	imaginary number
натуральное число	natural number
нечётное число	odd number
обратное число	inverse number
отвлечённое число	abstract number
относительное число	relative number
отрицательное число	negative number
подкоренное число	radicand number
положительное число	positive number
постоянное число	constant number
приближённое число	approximate number
простое число	prime number
противоположное число	contrary number

рациональное число	rational number
смешанное число	mixed number
сопряжённые (комплексные) числа	conjugate (complex) numbers
составное число	composite number
точное число	exact number
целое число	integer, whole number
чётное число	even number
корень из числа	root of a number
натуральный ряд чисел	natural series of numbers
степень числа	power of a number
ЧИСЛОВОЙ	numerical
числовое значение	numerical value
числовая интерполяция	numerical interpolation
числовой коэффициент	numerical coefficient
числовая ось	numerical axis
числовая последовательность	numerical succession
числовое равенство	numerical equality
ЧИСТЫЙ	pure
чистая периодическая (десятичная) дробь	pure recurrent (decimal) fraction
ЧЛЕН	member, term
члены отношения	terms of a ratio
члены пропорции	terms of a proportion
крайние члены пропорции	extreme terms of a proportion, extremes
неизвестный член	unknown term
подобные члены	similar terms, like terms
последующий член	following term
предыдущий член	preceding term
свободный член	absolute term, free term
средние члены пропорции	middle term of a proportion, means
ЧТЕНИЕ	reading
чтение чисел	reading of numbers

Ш

ШАР	ball, sphere
ШАРОВОЙ	spherical
шаровая зона	spherical zone
шаровой пояс	spherical belt (zone)
шаровой сегмент	spherical segment
шаровой сектор	spherical sector
шаровой слой	spherical layer
ШЕСТИГРАННИК (син. гексаэдр)	hexahedron
ШЕСТИУГОЛЬНИК	hexagon
ШИРИНА, только ед. ч.	breadth, width
плоскость шириной в 5 см	plane 5 cm in width
ШКАЛА	scale
ШТРИХОВАТЬ, /, нес. в., что?, ЗАШТРИХОВАТЬ, /, сов. в. (1 л. мн. ч. ЗАШТРИХУЕМ)	to shade, to hatch

штриховать треугольник	to shade a triangle, to hatch a triangle

Э

ЭКВИВАЛЕНТ	equivalent
ЭКВИВАЛЕНТНЫЙ (син. равносильный)	equivalent
ЭКСЦЕНТРИЧЕСКИЙ (ант. концентрический)	eccentric (ant. concentric)
ЭКСЦЕНТРИЧЕСКИЕ ОКРУЖНОСТИ	eccentric circles
ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ	elementary
элементарная функция	elementary function
ЭЛЛИПС	ellipse

Я

ЯВЛЕНИЕ	phenomenon, effect
закономерное явление	natural phenomenon, regular effect
ЯВЛЯТЬСЯ, /, нес. в., чем?, ЯВИТЬСЯ, //, сов. в.	to be
являться целым числом	to be a whole number

КРАТКИЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\sum$ – знак суммы
$\forall$ – любой
$\exists$ – существует (например, $\exists x$ – существует такое $x, \ldots$)
$\Leftrightarrow$ – равносильно
$\Rightarrow$ – следовательно
∞ – бесконечный
$\approx$ – приблизительно равно
$\in$ – принадлежит
$\notin$ – не принадлежит
$\cap$ – пересечение (например, $A \cap B$ – пересечение множеств А и В)
$\cup$ – объединение (например, $A \cup B$ – объединение множеств А и В)

ЛИТЕРАТУРА

1. *Колмогоров А.Н.*, Абрамов А.М., Вейц Б. Е. Алгебра и начала анализа. 9–10 кл. – М: Просвещение, 1987.
2. *Баранов А.П., Клименок М.Ф.* Курс лекций по медицинской и биологической физике. – Витебск: ВГМУ, 2002.
3. *Крамор В.С.* Алгебра и начала анализа. – М: Высшая школа, 1981.
4. *Лобоцкая Н.Л.*, Морозов Ю.В., Дунаев А.А. Высшая математика. – Минск: Вышэйшая, 1987.
5. *Гусак А.А.* Математический анализ и дифференциальные уравнения. – Минск: ТетраСистем, 2001.
6. *Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Муравин К.С., Суворова С.Б.* Алгебра 8 кл. – М: Просвещение, 1989.
7. *Тарасов Н.П.* Курс высшей математики для технткумов. – М: Высшая школа, 1975.
8. *Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А.* Математический анализ в вопросах и задачах. – М: Высшая школа, 1984.
9. *Яснова М. М., Бельдюшкин В. С., Федотова З. А.* Русско-английский словарь – минимум по математике, физике и химии. – М: Университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, 1969.

Учебное издание

Иванова Светлана Викторовна, **Гараничева** Светлана Леонидовна.

ОСНОВЫ МАТЕМАТИКИ

Пособие

Редактор А.П. Баранов
Технический редактор И.А. Борисов
Компьютерная верстка П.Г. Адаменко
Корректор А.П. Баранов

Подписано в печать 29.11.07. Формат бумаги 64x84 1/16.
Бумага типографская №2. Гарнитура ТАЙМС. Усл. печ. листов 9,94.
Уч.-изд. л. 7,43. Тираж 100 экз. Заказ № 1209.
Издатель и полиграфическое исполнение УО
«Витебский государственный медицинский университет».
ЛИ № 02330/0133209 от 30.04.04.
210602, Витебск, Фрунзе, 27

Отпечатано на ризографе в Витебском государственном
медицинском университете.
210602, Витебск, Фрунзе, 27
Тел. (8-0212) 261966